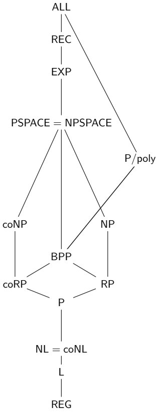
Rýchle paralelné algoritmy a malá pamäť

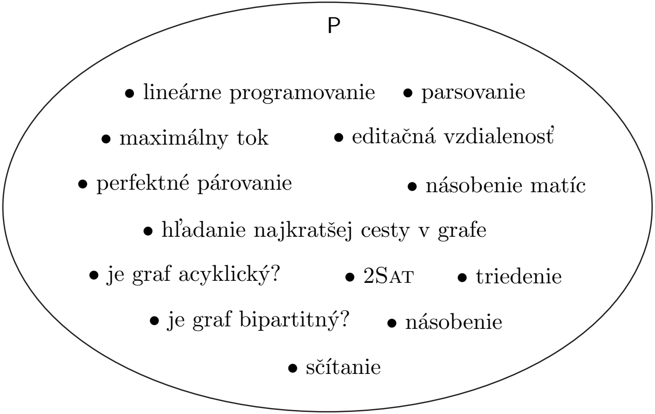
kuko

17.3.2021

Pokročilá teória zložitosti



ALL
REC
EXP
PSPACE = NPSPACE
P/poly
coNP
NP
BPP
coRP
RP
P
NL = coNL
L
REG


P
• lineárne programovanie
• parsovanie
• maximálny tok
• editačná vzdialenosť
• perfektné párovanie
• násobenie matíc
• hľadanie najkratšej cesty v grafe
• je graf acyklický?
• 2SAT
• triedenie
• je graf bipartitný?
• násobenie
• sčítanie

NC hierarchia

Definícia

NC =*jazyky s efektívnymi paralelnými algoritmami*

- *PRAM, poly procesorov, polylog čas, alebo*
- *obvody poly veľkosti, polylog hĺbky.*

Veta

NC $\subseteq$ P

NC hierarchia

Definícia

NC $=$*jazyky s efektívnymi paralelnými algoritmami*

- *PRAM, poly procesorov, polylog čas, alebo*
- *obvody poly veľkosti, polylog hĺbky.*

Veta

NC $\subseteq$ P

NC hierarchia

Definícia

NC^k:

- *uniformné*
- $\wedge$, $\vee$, $\neg$
- *hradlá* $\wedge$ *a* $\vee$ *majú 2 vstupy*
- poly$n$ *veľkosť*
- $O(\log^k n)$ *hĺbka*

$\mathsf{NC} = \bigcup_k \mathsf{NC}^k$

NC hierarchia

Definícia

NC^k:

- *uniformné*
- $\wedge$, $\vee$, $\neg$
- *hradlá* $\wedge$ *a* $\vee$ *majú 2 vstupy*
- poly$n$ *veľkosť*
- $O(\log^k n)$ *hĺbka*

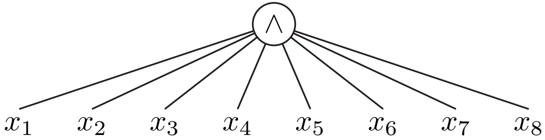
$\mathsf{NC} = \bigcup_k \mathsf{NC}^k$

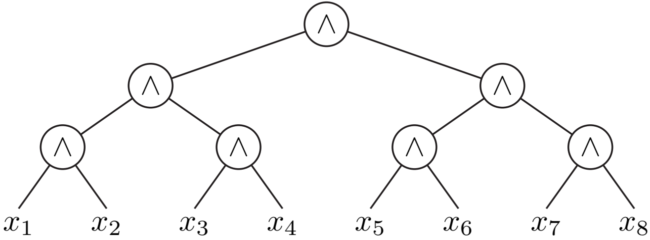
AC hierarchia

Definícia

AC^k:

- *uniformné*
- $\wedge$, $\vee$, $\neg$
- poly$n$ *veľkosť*
- $O(\log^k n)$ *hĺbka*
- *hradlá* $\wedge$ *a* $\vee$ *majú neobmedzený počet vstupov*





$$\mathsf{NC}^k \subseteq \mathsf{AC}^k \subseteq \mathsf{NC}^{k+1}$$

Sčítanie

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & & \uparrow & & & & & & & \uparrow & &
\end{array}
$$

Veta

$\textsc{Addition} \in \mathrm{AC}^0$.

Dôkaz.

$$c_i = \bigvee_{j<i} a_j \wedge b_j \wedge \left(\bigwedge_{j<k<i} a_k \vee b_k \right).$$

$\square$

Násobenie

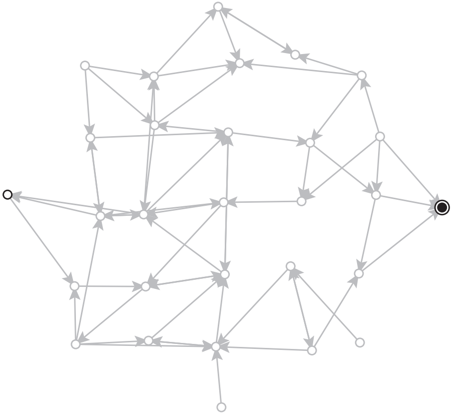
$$
\begin{array}{cccccccl}
 & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & + & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 & + & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
 & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \quad \textit{súčty mod 2} \\
+ & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \quad \textit{prenosy do vyššieho rádu}
\end{array}
$$

		11	9	17	5	12	18	*redundantný zápis: 10-tková sústava*
+		6	12	9	10	8	18	*s ciframi [0..18]*
		17	21	26	15	20	36	*medzivýsledok má cifry [0..36]*
		7	1	6	5	0	16	*rozložíme ich na 10×[0..2]+[0..16]*
+	1	2	2	1	2	2		*(tu sú prenosy do vyššieho rádu) a sčítame*
	1	9	3	7	7	2	16	*cifry výsledku budú opäť [0..18]*

Veta

$\textsc{Multiplication} \in \mathsf{NC}^1$.

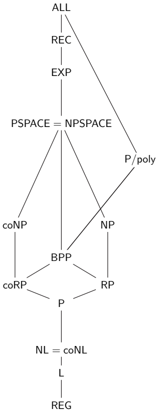
Hľadanie cesty v grafe



Veta

Zistiť, či existuje cesta medzi dvoma vrcholmi v (orientovanom) grafe sa dá v AC^1.

Vzťah medzi L, NL a NC


ALL
REC
EXP
PSPACE = NPSPACE
P/poly
coNP
NP
BPP
coRP
RP
P
NL = coNL
L
REG

Veta

Problém zistiť, či existuje cesta medzi dvoma vrcholmi v danom orientovanom grafe je NL*-úplný pri logspace redukcii.*

Veta

$\mathsf{NC}^1 \subseteq \mathsf{L} \subseteq \mathsf{NL} \subseteq \mathsf{AC}^1 \subseteq \mathsf{NC}^2$.

Charakterizácia cez alternáciu

$$\mathsf{NL} \subseteq \mathsf{NC} \subseteq \mathsf{P} = \mathsf{AL}$$

Definícia

Trieda STA$(s(n), t(n), Xa(n))$ *Napríklad*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{L} &= \mathrm{STA}(\log, *, 0) \\
\mathrm{P} &= \mathrm{STA}(*, \mathrm{poly}, 0) = \mathrm{STA}(\log, *, *) = \mathrm{AL} \\
\mathrm{NP} &= \mathrm{STA}(*, \mathrm{poly}, \Sigma_1) \\
\Pi_k^{\mathrm{P}} &= \mathrm{STA}(*, \mathrm{poly}, \Pi_k) \\
\mathrm{PSPACE} &= \mathrm{STA}(\mathrm{poly}, *, 0) = \mathrm{STA}(*, \mathrm{poly}, *) = \mathrm{AP}
\end{aligned}
$$

Definícia

Trieda $\mathrm{STA}(s(n), t(n), Xa(n))$ *Napríklad*

$$\begin{aligned}
\mathrm{L} &= \mathrm{STA}(\log, *, 0) \\
\mathrm{P} &= \mathrm{STA}(*, \mathrm{poly}, 0) = \mathrm{STA}(\log, *, *) = \mathrm{AL} \\
\mathrm{NP} &= \mathrm{STA}(*, \mathrm{poly}, \Sigma_1) \\
\Pi_k^{\mathrm{P}} &= \mathrm{STA}(*, \mathrm{poly}, \Pi_k) \\
\mathrm{PSPACE} &= \mathrm{STA}(\mathrm{poly}, *, 0) = \mathrm{STA}(*, \mathrm{poly}, *) = \mathrm{AP}
\end{aligned}$$

Veta

$$\mathrm{NC} = \mathrm{STA}(\log, \mathrm{polylog}, *) = \mathrm{STA}(\log, *, \mathrm{polylog})$$

Pre $k \geq 1$:

$$\mathrm{AC}^k = \mathrm{STA}(\log, *, \log^k)$$

Dôsledok

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{NL} & = & \mathrm{STA}(\log, *, \Sigma_1) \\ \subseteq & & \subseteq \\ \mathrm{AC}^1 & = & \mathrm{STA}(\log, *, \log) \\ \subseteq & & \subseteq \\ \mathrm{NC} & = & \mathrm{STA}(\log, *, \mathrm{polylog}) \\ \subseteq & & \subseteq \\ \mathrm{P} & = & \mathrm{STA}(\log, *, *) \end{array}$$

Veta

$$\mathrm{NC} = \mathrm{STA}(\log, \mathrm{polylog}, *) = \mathrm{STA}(\log, *, \mathrm{polylog})$$

Pre $k \geq 1$:

$$\mathrm{AC}^k = \mathrm{STA}(\log, *, \log^k)$$

Dôsledok

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{NL} & = & \mathrm{STA}(\log, *, \Sigma_1) \\
\cap\!| & & \cap\!| \\
\mathrm{AC}^1 & = & \mathrm{STA}(\log, *, \log) \\
\cap\!| & & \cap\!| \\
\mathrm{NC} & = & \mathrm{STA}(\log, *, \mathrm{polylog}) \\
\cap\!| & & \cap\!| \\
\mathrm{P} & = & \mathrm{STA}(\log, *, *)
\end{array}$$

Veta

$$\mathrm{NC} = \mathrm{STA}(\log, \mathrm{polylog}, *) = \mathrm{STA}(\log, *, \mathrm{polylog})$$

Pre $k \geq 1$*:*

$$\mathrm{AC}^k = \mathrm{STA}(\log, *, \log^k)$$

Dôsledok

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{NL} & = & \mathrm{STA}(\log, *, \Sigma_1) \\
\cap\!\!\mid & & \cap\!\!\mid \\
\mathrm{AC}^1 & = & \mathrm{STA}(\log, *, \log) \\
\cap\!\!\mid & & \cap\!\!\mid \\
\mathrm{NC} & = & \mathrm{STA}(\log, *, \mathrm{polylog}) \\
\cap\!\!\mid & & \cap\!\!\mid \\
\mathrm{P} & = & \mathrm{STA}(\log, *, *)
\end{array}$$

Veta

$$\mathrm{NC} = \mathrm{STA}(\log, \mathrm{polylog}, *) = \mathrm{STA}(\log, *, \mathrm{polylog})$$

Pre $k \geq 1$:

$$\mathrm{AC}^k = \mathrm{STA}(\log, *, \log^k)$$

■ **Dôkaz.** $\subseteq$: AC-obvod $\Longrightarrow$ monotónny obvod so vstupmi $x, \overline{x}$

$\supseteq$: násobenie matíc:

- $S_x(\alpha, \beta) \Longleftrightarrow \alpha \vdash \beta \wedge \mathrm{typ}(\alpha) = \mathrm{typ}(\beta)$ a
- $T_x(\alpha, \beta) \Longleftrightarrow \alpha \vdash \beta \wedge \mathrm{typ}(\alpha) \neq \mathrm{typ}(\beta)$;
- $M_x = S_x^* T_x$
- $M_x(\alpha, \beta) = 1 \Longleftrightarrow \alpha \vdash^* \gamma \vdash \beta$, pričom počas výpočtu bol typ stavov rovnaký, až v poslednom kroku sa zmenil
- vektor a_i: $a_i(C) = 1$ ak C je akcept. konfig. na i-tej úrovni
- $\exists$-úrovne: $a_{i+1} = M_x a_i$
- $\forall$-úrovne: $a_{i+1} = \neg(M_x(\neg a_i))$
- akceptujeme, ak $a_{\log^k n}(C_0) = 1$

Veta

$$\mathrm{NC} = \mathrm{STA}(\log, \mathrm{polylog}, *) = \mathrm{STA}(\log, *, \mathrm{polylog})$$

Pre $k \geq 1$:

$$\mathrm{AC}^k = \mathrm{STA}(\log, *, \log^k)$$

■ **Dôkaz.** $\subseteq$: AC-obvod $\Longrightarrow$ monotónny obvod so vstupmi $x, \overline{x}$

$\supseteq$: násobenie matíc:

- $S_x(\alpha, \beta) \iff \alpha \vdash \beta \wedge \mathrm{typ}(\alpha) = \mathrm{typ}(\beta)$ a
- $T_x(\alpha, \beta) \iff \alpha \vdash \beta \wedge \mathrm{typ}(\alpha) \neq \mathrm{typ}(\beta)$;
- $M_x = S_x^* T_x$
- $M_x(\alpha, \beta) = 1 \iff \alpha \vdash^* \gamma \vdash \beta$, pričom počas výpočtu bol typ stavov rovnaký, až v poslednom kroku sa zmenil
- vektor a_i: $a_i(C) = 1$ ak C je akcept. konfig. na i-tej úrovni
- $\exists$-úrovne: $a_{i+1} = M_x a_i$
- $\forall$-úrovne: $a_{i+1} = \neg(M_x(\neg a_i))$
- akceptujeme, ak $a_{\log^k n}(C_0) = 1$

Veta

$$\mathrm{NC} = \mathrm{STA}(\log, \mathrm{polylog}, *) = \mathrm{STA}(\log, *, \mathrm{polylog})$$

Pre $k \geq 1$:

$$\mathrm{AC}^k = \mathrm{STA}(\log, *, \log^k)$$

■ **Dôkaz.** $\subseteq$: AC-obvod $\Longrightarrow$ monotónny obvod so vstupmi $x, \overline{x}$

$\supseteq$: násobenie matíc:

- $S_x(\alpha, \beta) \Longleftrightarrow \alpha \vdash \beta \wedge \mathrm{typ}(\alpha) = \mathrm{typ}(\beta)$ a
- $T_x(\alpha, \beta) \Longleftrightarrow \alpha \vdash \beta \wedge \mathrm{typ}(\alpha) \neq \mathrm{typ}(\beta)$;
- $M_x = S_x^* T_x$
- $M_x(\alpha, \beta) = 1 \Longleftrightarrow \alpha \vdash^* \gamma \vdash \beta$, pričom počas výpočtu bol typ stavov rovnaký, až v poslednom kroku sa zmenil
- vektor a_i: $a_i(C) = 1$ ak C je akcept. konfig. na i-tej úrovni
- $\exists$-úrovne: $a_{i+1} = M_x a_i$
- $\forall$-úrovne: $a_{i+1} = \neg(M_x(\neg a_i))$
- akceptujeme, ak $a_{\log^k n}(C_0) = 1$

Veta

$$\mathrm{NC} = \mathrm{STA}(\log, \mathrm{polylog}, *) = \mathrm{STA}(\log, *, \mathrm{polylog})$$

Pre $k \geq 1$:

$$\mathrm{AC}^k = \mathrm{STA}(\log, *, \log^k)$$

■ **Dôkaz.** $\subseteq$: AC-obvod $\Longrightarrow$ monotónny obvod so vstupmi $x, \overline{x}$

$\supseteq$: násobenie matíc:

- $S_x(\alpha, \beta) \Longleftrightarrow \alpha \vdash \beta \wedge \mathrm{typ}(\alpha) = \mathrm{typ}(\beta)$ a
- $T_x(\alpha, \beta) \Longleftrightarrow \alpha \vdash \beta \wedge \mathrm{typ}(\alpha) \neq \mathrm{typ}(\beta)$;
- $M_x = S_x^* T_x$
- $M_x(\alpha, \beta) = 1 \Longleftrightarrow \alpha \vdash^* \gamma \vdash \beta$, pričom počas výpočtu bol typ stavov rovnaký, až v poslednom kroku sa zmenil
- vektor a_i: $a_i(C) = 1$ ak C je akcept. konfig. na i-tej úrovni
- $\exists$-úrovne: $a_{i+1} = M_x a_i$
- $\forall$-úrovne: $a_{i+1} = \neg(M_x(\neg a_i))$
- akceptujeme, ak $a_{\log^k n}(C_0) = 1$

Veta

$$\mathrm{NC} = \mathrm{STA}(\log, \mathrm{polylog}, *) = \mathrm{STA}(\log, *, \mathrm{polylog})$$

Pre $k \geq 1$:

$$\mathrm{AC}^k = \mathrm{STA}(\log, *, \log^k)$$

■ **Dôkaz.** $\subseteq$: AC-obvod $\Longrightarrow$ monotónny obvod so vstupmi $x, \overline{x}$

$\supseteq$: násobenie matíc:

- $S_x(\alpha, \beta) \iff \alpha \vdash \beta \wedge \mathrm{typ}(\alpha) = \mathrm{typ}(\beta)$ a
- $T_x(\alpha, \beta) \iff \alpha \vdash \beta \wedge \mathrm{typ}(\alpha) \neq \mathrm{typ}(\beta)$;
- $M_x = S_x^* T_x$
- $M_x(\alpha, \beta) = 1 \iff \alpha \vdash^* \gamma \vdash \beta$, pričom počas výpočtu bol typ stavov rovnaký, až v poslednom kroku sa zmenil
- vektor a_i: $a_i(C) = 1$ ak C je akcept. konfig. na i-tej úrovni
- $\exists$-úrovne: $a_{i+1} = M_x a_i$
- $\forall$-úrovne: $a_{i+1} = \neg(M_x(\neg a_i))$
- akceptujeme, ak $a_{\log^k n}(C_0) = 1$

Veta

$$\mathrm{NC} = \mathrm{STA}(\log, \mathrm{polylog}, *) = \mathrm{STA}(\log, *, \mathrm{polylog})$$

Pre $k \geq 1$:

$$\mathrm{AC}^k = \mathrm{STA}(\log, *, \log^k)$$

■ **Dôkaz.** $\subseteq$: AC-obvod $\Longrightarrow$ monotónny obvod so vstupmi $x, \overline{x}$

$\supseteq$: násobenie matíc:

- $S_x(\alpha, \beta) \iff \alpha \vdash \beta \wedge \mathrm{typ}(\alpha) = \mathrm{typ}(\beta)$ a
- $T_x(\alpha, \beta) \iff \alpha \vdash \beta \wedge \mathrm{typ}(\alpha) \neq \mathrm{typ}(\beta)$;
- $M_x = S_x^* T_x$
- $M_x(\alpha, \beta) = 1 \iff \alpha \vdash^* \gamma \vdash \beta$, pričom počas výpočtu bol typ stavov rovnaký, až v poslednom kroku sa zmenil
- vektor a_i: $a_i(C) = 1$ ak C je akcept. konfig. na i-tej úrovni
- $\exists$-úrovne: $a_{i+1} = M_x a_i$
- $\forall$-úrovne: $a_{i+1} = \neg(M_x(\neg a_i))$
- akceptujeme, ak $a_{\log^k n}(C_0) = 1$

Veta

$$\mathrm{NC} = \mathrm{STA}(\log, \mathrm{polylog}, *) = \mathrm{STA}(\log, *, \mathrm{polylog})$$

Pre $k \geq 1$:

$$\mathrm{AC}^k = \mathrm{STA}(\log, *, \log^k)$$

■ **Dôkaz.** $\subseteq$: AC-obvod $\Longrightarrow$ monotónny obvod so vstupmi $x, \overline{x}$

$\supseteq$: násobenie matíc:

- $S_x(\alpha, \beta) \iff \alpha \vdash \beta \wedge \mathrm{typ}(\alpha) = \mathrm{typ}(\beta)$ a
- $T_x(\alpha, \beta) \iff \alpha \vdash \beta \wedge \mathrm{typ}(\alpha) \neq \mathrm{typ}(\beta)$;
- $M_x = S_x^* T_x$
- $M_x(\alpha, \beta) = 1 \iff \alpha \vdash^* \gamma \vdash \beta$, pričom počas výpočtu bol typ stavov rovnaký, až v poslednom kroku sa zmenil
- vektor a_i: $a_i(C) = 1$ ak C je akcept. konfig. na i-tej úrovni
- $\exists$-úrovne: $a_{i+1} = M_x a_i$
- $\forall$-úrovne: $a_{i+1} = \neg(M_x(\neg a_i))$
- akceptujeme, ak $a_{\log^k n}(C_0) = 1$

Veta

$$\mathrm{NC} = \mathrm{STA}(\log, \mathrm{polylog}, *) = \mathrm{STA}(\log, *, \mathrm{polylog})$$

Pre $k \geq 1$:

$$\mathrm{AC}^k = \mathrm{STA}(\log, *, \log^k)$$

■ **Dôkaz.** $\subseteq$: AC-obvod $\Longrightarrow$ monotónny obvod so vstupmi $x, \overline{x}$
$\supseteq$: násobenie matíc:

- $S_x(\alpha, \beta) \Longleftrightarrow \alpha \vdash \beta \wedge \mathrm{typ}(\alpha) = \mathrm{typ}(\beta)$ a
- $T_x(\alpha, \beta) \Longleftrightarrow \alpha \vdash \beta \wedge \mathrm{typ}(\alpha) \neq \mathrm{typ}(\beta)$;
- $M_x = S_x^* T_x$
- $M_x(\alpha, \beta) = 1 \Longleftrightarrow \alpha \vdash^* \gamma \vdash \beta$, pričom počas výpočtu bol typ stavov rovnaký, až v poslednom kroku sa zmenil
- vektor a_i: $a_i(C) = 1$ ak C je akcept. konfig. na i-tej úrovni
- $\exists$-úrovne: $a_{i+1} = M_x a_i$
- $\forall$-úrovne: $a_{i+1} = \neg(M_x(\neg a_i))$
- akceptujeme, ak $a_{\log^k n}(C_0) = 1$

Veta

$$\mathrm{NC} = \mathrm{STA}(\log, \mathrm{polylog}, *) = \mathrm{STA}(\log, *, \mathrm{polylog})$$

Pre $k \geq 1$:

$$\mathrm{AC}^k = \mathrm{STA}(\log, *, \log^k)$$

■ **Dôkaz.** $\subseteq$: AC-obvod $\Longrightarrow$ monotónny obvod so vstupmi $x, \overline{x}$

$\supseteq$: násobenie matíc:

- $S_x(\alpha, \beta) \Longleftrightarrow \alpha \vdash \beta \wedge \mathrm{typ}(\alpha) = \mathrm{typ}(\beta)$ a
- $T_x(\alpha, \beta) \Longleftrightarrow \alpha \vdash \beta \wedge \mathrm{typ}(\alpha) \neq \mathrm{typ}(\beta)$;
- $M_x = S_x^* T_x$
- $M_x(\alpha, \beta) = 1 \Longleftrightarrow \alpha \vdash^* \gamma \vdash \beta$, pričom počas výpočtu bol typ stavov rovnaký, až v poslednom kroku sa zmenil
- vektor a_i: $a_i(C) = 1$ ak C je akcept. konfig. na i-tej úrovni
- $\exists$-úrovne: $a_{i+1} = M_x a_i$
- $\forall$-úrovne: $a_{i+1} = \neg(M_x(\neg a_i))$
- akceptujeme, ak $a_{\log^k n}(C_0) = 1$

Parsovanie

Veta

Regulárne jazyky sa dajú akceptovať v NC^1.

Veta

Bezkontextové jazyky vieme akceptovať v $\mathrm{AC}^1 = \mathrm{STA}(\log, *, \log)$.

- Hra Alice ($\exists$) a Boba ($\forall$), kde A chce dokázať:

$$\sigma \Rightarrow_G^* w$$

- ťah A: (α, i, j)

$$\sigma \Rightarrow_G^* w_{1,i} \alpha w_{j,n} \qquad \text{a} \qquad \alpha \Rightarrow_G^* w_{i,j}$$

- ťah B: vyberie si, ktoré tvrdenie chce dokázať

Veta

Bezkontextové jazyky vieme akceptovať v $\mathrm{AC}^1 = \mathrm{STA}(\log, *, \log)$.

- Hra Alice ($\exists$) a Boba ($\forall$), kde A chce dokázať:

$$\sigma \Rightarrow_G^* w$$

- ťah A: (α, i, j)

$$\sigma \Rightarrow_G^* w_{1,i}\alpha w_{j,n} \qquad \text{a} \qquad \alpha \Rightarrow_G^* w_{i,j}$$

- ťah B: vyberie si, ktoré tvrdenie chce dokázať

Veta

Bezkontextové jazyky vieme akceptovať v $\mathrm{AC}^1 = \mathrm{STA}(\log, *, \log)$.

- Hra Alice ($\exists$) a Boba ($\forall$), kde A chce dokázať:

$$\sigma \Rightarrow_G^* w$$

- ťah A: (α, i, j)

$$\sigma \Rightarrow_G^* w_{1,i} \alpha w_{j,n} \qquad \text{a} \qquad \alpha \Rightarrow_G^* w_{i,j}$$

- ťah B: vyberie si, ktoré tvrdenie chce dokázať

Veta

Bezkontextové jazyky vieme akceptovať v $AC^1 = STA(\log, *, \log)$.

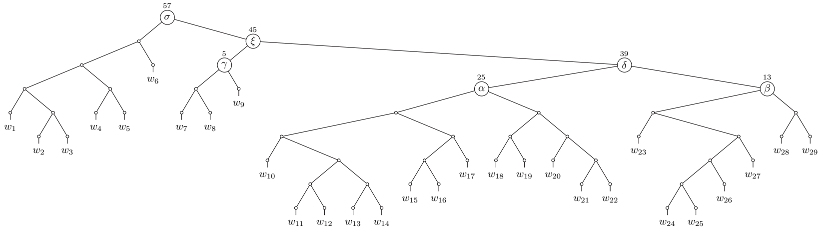
- Hra Alice ($\exists$) a Boba ($\forall$), kde A chce dokázať:

$$\sigma \Rightarrow_G^* w$$

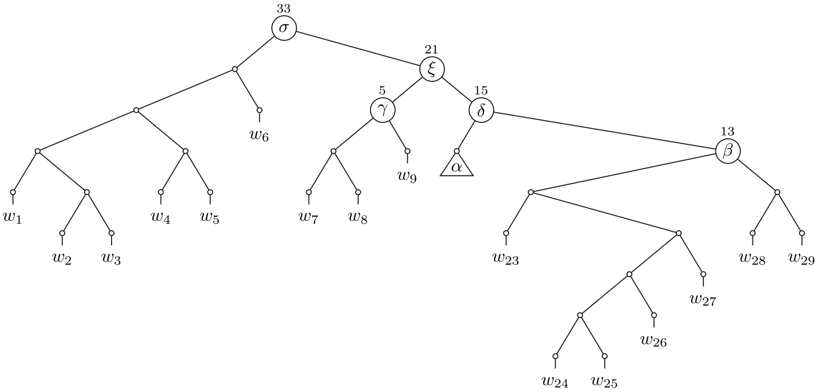
- ťah A: (α, i, j)

$$\sigma \Rightarrow_G^* w_{1,i} \alpha w_{j,n} \qquad \text{a} \qquad \alpha \Rightarrow_G^* w_{i,j}$$

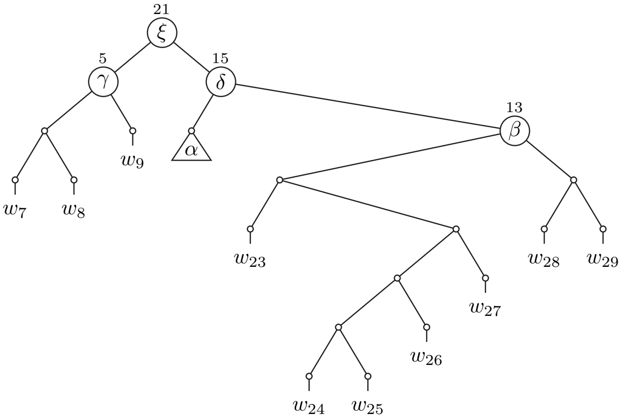
- ťah B: vyberie si, ktoré tvrdenie chce dokázať



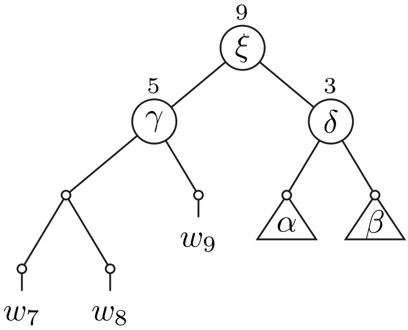
Obr.: A: $(\alpha, 10, 23)$; B: hore



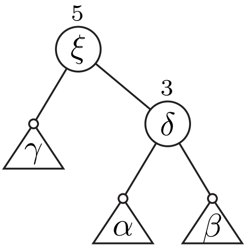
Obr.: A: $(\xi, 7, 30)$; B: dolu



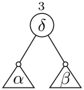
Obr.: A: $(\beta, 10, 30)$; B: hore



Obr.: A: $(\gamma, 7, 10)$; B: hore



Obr.: A: $(\delta, 10, 30)$; B: dolu



Obr.: $\delta \to \alpha\beta$ je pravidlo G, vyhráva A pozícia hry:

$$\sigma \Rightarrow_G^* w_{i_1,i_2}\ \alpha_1\ w_{i_3,i_4}\ \alpha_2\ w_{i_5,i_6}\ \alpha_3 \cdots \alpha_k\ w_{i_{2k+1},i_{2k+2}}$$

Veta

Nasledujúce problémy sú P*-úplné:*

- CVP – *vyhodnotenie daného boolovského obvodu na danom vstupe*
- HornSat – *problém splniteľnosti pre Hornove formule (v CNF, každá klauzula má najviac jeden pozitívny literál)*
- Dfs – *daný je graf a dva vrcholy u, v; ak na grafe spustíme prehľadávanie do hĺbky (pričom zoznam susedov prehľadávame vo fixnom poradí danom na vstupe), ktorý vrchol z dvojice u, v navštívime ako prvý?*
- ...

Veta

- ...
- MaxFlow – *daný je ohodnotený graf, vrcholy s, t a číslo f; existuje s-t-tok veľkosti aspoň f?*
- LP – *lineárne programovanie: existuje pre danú maticu A a vektor b riešenie nerovníc $Ax \leq b$, $x > 0$ v racionálnych číslach?*
- CfgMem – *$w \in L(G)$? pre danú bezkontextovú gramatiku G a slovo w (pozor, toto je úplne iný problém, ako rozhodovať jazyk $L(G)$ pre fixnú bezkontextovú gramatiku)*
- IteratedMod – *dané $a, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{Z}$; je $((\cdots((a \bmod b_1) \bmod b_2)\cdots) \bmod b_n) = 0$?*