S1S a konečné automaty na nekonečných slovách

kuko

15.4.2021

Pokročilá teória zložitosti

- $\phi(X) \longrightarrow L_\phi = \{\chi_A \mid \mathbb{N} \models \phi(A)\}$.
- jazyky popísateľné S1S formulami sú práve ω-REG jazyky

- $\phi(X) \longrightarrow L_\phi = \{\chi_A \mid \mathbb{N} \models \phi(A)\}$.
- jazyky popísateľné S1S formulami sú práve ω-REG jazyky

Omega-regulárne jazyky

- Σ^ω
- iterácia: L^ω (pre $\varepsilon \notin L$)
- zjednotenie $N_1, N_2 \subseteq \Sigma^\omega$: $N_1 \cup N_2$
- zreťazenie $L \subseteq \Sigma^*, N \subseteq \Sigma^\omega$: $L \cdot N$

- Σ^ω
- iterácia: L^ω (pre $\varepsilon \notin L$)
- zjednotenie $N_1, N_2 \subseteq \Sigma^\omega$: $N_1 \cup N_2$
- zreťazenie $L \subseteq \Sigma^*, N \subseteq \Sigma^\omega$: $L \cdot N$

- Σ^ω
- iterácia: L^ω (pre $\varepsilon \notin L$)
- zjednotenie $N_1, N_2 \subseteq \Sigma^\omega$: $N_1 \cup N_2$
- zreťazenie $L \subseteq \Sigma^*, N \subseteq \Sigma^\omega$: $L \cdot N$

- Σ^ω
- iterácia: L^ω (pre $\varepsilon \notin L$)
- zjednotenie $N_1, N_2 \subseteq \Sigma^\omega$: $N_1 \cup N_2$
- zreťazenie $L \subseteq \Sigma^*, N \subseteq \Sigma^\omega$: $L \cdot N$

Definícia (Omega-regulárne výrazy a jazyky)

Ak α je (klasický) regexp a γ, δ sú ω-regulárne, tak aj

- α^ω
- $\alpha\gamma$
- $(\gamma \mid \delta)$ *sú ω-regulárne výrazy*
- ω-*regexpy* $\Longrightarrow$ ω-*regulárne jazyky*
- $L = \bigcup_i A_i B_i^\omega$

Definícia (Omega-regulárne výrazy a jazyky)

Ak α je (klasický) regexp a γ, δ sú ω-regulárne, tak aj

- α^ω
- $\alpha\gamma$
- $(\gamma \mid \delta)$ *sú ω-regulárne výrazy*
- *ω-regexpy $\Longrightarrow$ ω-regulárne jazyky*
- $L = \bigcup_i A_i B_i^\omega$

- $(0 \mid 1)^*0^\omega$
- $(0^*1)^\omega$

Konečné automaty

- $\mathrm{io}(\rho) = \bigcap_{n \geq 0} \{q_i \mid i \geq n\}$
- Büchiho podmienka: ρ je akceptačný výpočet, ak $\mathrm{io}(\rho) \cap F \neq \emptyset$

- $\mathrm{io}(\rho) = \bigcap_{n\geq 0}\{q_i \mid i \geq n\}$
- Büchiho podmienka: ρ je akceptačný výpočet, ak $\mathrm{io}(\rho) \cap F \neq \emptyset$

Veta

Jazyky akceptované NBA sú práve ω-regulárne jazyky.

Náznak dôkazu.

- ($\supseteq$): ak $L \in REG$ a $\exists NBA$ pre $L_1, L_2 \in \omega$-REG, tak vieme zostrojiť NBA pre L^ω, $L \cdot L_1$ a $L_1 \cup L_2$.
- ($\subseteq$): nech $L_{p,q}$ = jazyk (konečných) slov, na ktoré sa automat vie dostať zo stavu p do q
- NBA akceptuje práve $\bigcup_{f \in F} L_{q_0,f} L^\omega_{f,f}$

$\square$

Veta

Jazyky akceptované NBA sú práve ω-regulárne jazyky.

Náznak dôkazu.

- ($\supseteq$): ak $L \in \text{REG}$ a $\exists NBA$ pre $L_1, L_2 \in \omega$-REG, tak vieme zostrojiť NBA pre L^ω, $L \cdot L_1$ a $L_1 \cup L_2$.
- ($\subseteq$): nech $L_{p,q}$ = jazyk (konečných) slov, na ktoré sa automat vie dostať zo stavu p do q
- NBA akceptuje práve $\bigcup_{f \in F} L_{q_0,f} L_{f,f}^\omega$

□

Veta

Jazyky akceptované NBA sú práve ω-regulárne jazyky.

■ **Náznak dôkazu.**

- ($\supseteq$): ak $L \in$ REG a $\exists NBA$ pre $L_1, L_2 \in \omega$-REG, tak vieme zostrojiť NBA pre L^ω, $L \cdot L_1$ a $L_1 \cup L_2$.
- ($\subseteq$): nech $L_{p,q} =$ jazyk (konečných) slov, na ktoré sa automat vie dostať zo stavu p do q
- NBA akceptuje práve $\bigcup_{f \in F} L_{q_0,f} L_{f,f}^\omega$

□

Veta

Jazyky akceptované NBA sú práve ω-regulárne jazyky.

■ **Náznak dôkazu.**

- ($\supseteq$): ak $L \in$ REG a $\exists NBA$ pre $L_1, L_2 \in \omega$-REG, tak vieme zostrojiť NBA pre L^ω, $L \cdot L_1$ a $L_1 \cup L_2$.
- ($\subseteq$): nech $L_{p,q} =$ jazyk (konečných) slov, na ktoré sa automat vie dostať zo stavu p do q
- NBA akceptuje práve $\bigcup_{f \in F} L_{q_0,f} L_{f,f}^\omega$

$\square$

S1S popisuje ω-regulárne jazyky

Veta

- *NBA M nad abecedou* $\{0,1\} \Longrightarrow$ *S1S formula* $\phi(X)$ *(D.Ú.)*
- *S1S formula* $\phi(X) \Longrightarrow$ *NBA M taký, že* $L_\omega(M) = L_\phi$

Dôkaz.

- ϕ bez kvantifikátorov, hodnota všetkých (k) premenných na vstupe (abeceda $\{0,1\}^k$)
- napr. $x = 2$, $y = 0$, $z = 5$, $X = \{0,2,4,6,8,\dots\}$ = párne čísla, $Y = \{2,3,5,7,13,\dots\}$ = prvočísla a $Z = V_x = \{3,4,5,6,7,\dots\}$

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\
x = & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
y = & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
z = & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
X = & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
Y = & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
Z = & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 &
\end{array}$$

Veta

- *NBA M nad abecedou* $\{0,1\} \Longrightarrow$ *S1S formula* $\phi(X)$ *(D.Ú.)*
- *S1S formula* $\phi(X) \Longrightarrow$ *NBA M taký, že* $L_\omega(M) = L_\phi$

■ **Dôkaz.**

- ϕ bez kvantifikátorov, hodnota všetkých (k) premenných na vstupe (abeceda $\{0,1\}^k$)
- napr. $x = 2$, $y = 0$, $z = 5$, $X = \{0,2,4,6,8,\dots\}$ = párne čísla, $Y = \{2,3,5,7,13,\dots\}$ = prvočísla a $Z = V_x = \{3,4,5,6,7,\dots\}$

$$\begin{array}{r|cccccccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
x = & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
y = & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
z = & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \quad \cdots \\
X = & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
Y = & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
Z = & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

Veta

- *NBA M nad abecedou* $\{0,1\} \Longrightarrow$ *S1S formula* $\phi(X)$ *(D.Ú.)*
- *S1S formula* $\phi(X) \Longrightarrow$ *NBA M taký, že* $L_\omega(M) = L_\phi$

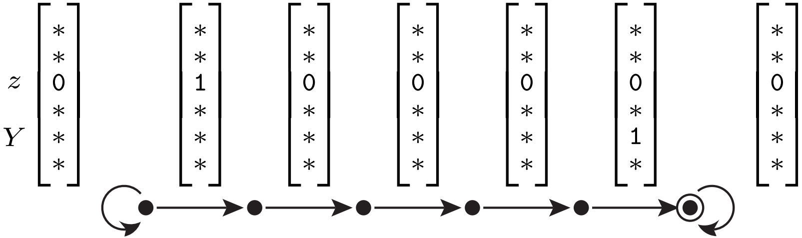
Dôkaz.

- ϕ bez kvantifikátorov, hodnota všetkých (k) premenných na vstupe (abeceda $\{0,1\}^k$)
- napr. $x = 2$, $y = 0$, $z = 5$, $X = \{0,2,4,6,8,\dots\} =$ párne čísla, $Y = \{2,3,5,7,13,\dots\} =$ prvočísla a $Z = V_x = \{3,4,5,6,7,\dots\}$

$$\begin{array}{rcccccccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\ x = & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ y = & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ z = & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ X = & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\ Y = & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ Z = & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

- atómy: $s^k(x) \in X$

- napr. $s(s(s(s(z)))) \in Y$



- $\phi \vee \psi \longrightarrow L_\omega(A) \cup L_\omega(B)$
- $\phi \wedge \psi \longrightarrow L_\omega(A) \cap L_\omega(B)$
- $\neg\phi \longrightarrow \overline{L_\omega(A)} = \Sigma^\omega - L_\omega(A)$
- deMorgan až k atómom

- $\exists Z : \phi(Z)$ nedeterministicky tipujeme množinu/nekonečné slovo Z a simulujeme NBA pre ϕ
- $\forall Z : \phi(Z) \longrightarrow \neg\exists Z : \neg\phi(Z)$

$\square$

Dôsledok

Teória S1S je rozhodnuteľná.

Veta

NBA (resp. ω-REG) sú uzavreté na komplement.
$\exists$*NBA pre* $\overline{L_\omega(A)}$ *s* $2^{O(n^2)}$ *stavmi.*

Dôkaz.

- $p \overset{u}{\rightsquigarrow} q$, ak na slovo u môže automat prejsť zo stavu p do q
- $p \overset{u}{\rightsquigarrow}_F q$, ak navyše cestou prejde cez nejaký akceptačný stav
- pre $u, v \in \Sigma^+$ nech $u \approx_A v$,

$$\forall p, q : (p \overset{u}{\rightsquigarrow} q \iff p \overset{v}{\rightsquigarrow} q) \wedge (p \overset{u}{\rightsquigarrow}_F q \iff p \overset{v}{\rightsquigarrow}_F q).$$

Veta

NBA (resp. ω-REG) sú uzavreté na komplement.
∃NBA pre $\overline{L_\omega(A)}$ s $2^{O(n^2)}$ stavmi.

■ **Dôkaz.**

- $p \overset{u}{\rightsquigarrow} q$, ak na slovo u môže automat prejsť zo stavu p do q
- $p \overset{u}{\rightsquigarrow}_F q$, ak navyše cestou prejde cez nejaký akceptačný stav
- pre $u, v \in \Sigma^+$ nech $u \approx_A v$,

$$\forall p, q : (p \overset{u}{\rightsquigarrow} q \iff p \overset{v}{\rightsquigarrow} q) \wedge (p \overset{u}{\rightsquigarrow}_F q \iff p \overset{v}{\rightsquigarrow}_F q).$$

Veta

NBA (resp. ω-REG) sú uzavreté na komplement.
$\exists$NBA pre $\overline{L_\omega(A)}$ s $2^{O(n^2)}$ stavmi.

■ **Dôkaz.**

- $p \overset{u}{\rightsquigarrow} q$, ak na slovo u môže automat prejsť zo stavu p do q
- $p \overset{u}{\rightsquigarrow}_F q$, ak navyše cestou prejde cez nejaký akceptačný stav
- pre $u, v \in \Sigma^+$ nech $u \approx_A v$,

$$\forall p, q : (p \overset{u}{\rightsquigarrow} q \iff p \overset{v}{\rightsquigarrow} q) \wedge (p \overset{u}{\rightsquigarrow}_F q \iff p \overset{v}{\rightsquigarrow}_F q).$$

Veta

NBA (resp. ω-REG) sú uzavreté na komplement.
$\exists$NBA pre $\overline{L_\omega(A)}$ s $2^{O(n^2)}$ stavmi.

Dôkaz.

- $p \overset{u}{\rightsquigarrow} q$, ak na slovo u môže automat prejsť zo stavu p do q
- $p \overset{u}{\rightsquigarrow}_F q$, ak navyše cestou prejde cez nejaký akceptačný stav
- pre $u, v \in \Sigma^+$ nech $u \approx_A v$,

$$\forall p, q : (p \overset{u}{\rightsquigarrow} q \iff p \overset{v}{\rightsquigarrow} q) \wedge (p \overset{u}{\rightsquigarrow}_F q \iff p \overset{v}{\rightsquigarrow}_F q).$$

- nech $f_w(p) = (Q_1, Q_2)$, kde $Q_1 = \Delta(p, w)$ a $Q_2 =$ kam sa automat dostane cez nejaký akceptačný stav
- $v \approx_A w \iff f_v = f_w$
- funkcií $f : Q \to 2^Q \times 2^Q$ je len konečne veľa
- $\approx_A$ má konečný index
- $[w]_{\approx_A} \in \mathrm{REG}$

- nech $f_w(p) = (Q_1, Q_2)$, kde $Q_1 = \Delta(p, w)$ a $Q_2 =$ kam sa automat dostane cez nejaký akceptačný stav
- $v \approx_A w \iff f_v = f_w$
- funkcií $f : Q \to 2^Q \times 2^Q$ je len konečne veľa
- $\approx_A$ má konečný index
- $[w]_{\approx_A} \in \text{REG}$

- nech $f_w(p) = (Q_1, Q_2)$, kde $Q_1 = \Delta(p, w)$ a $Q_2 =$ kam sa automat dostane cez nejaký akceptačný stav
- $v \approx_A w \iff f_v = f_w$
- funkcií $f : Q \to 2^Q \times 2^Q$ je len konečne veľa
- $\approx_A$ má konečný index
- $[w]_{\approx_A} \in \mathrm{REG}$

- nech $f_w(p) = (Q_1, Q_2)$, kde $Q_1 = \Delta(p, w)$ a $Q_2 =$ kam sa automat dostane cez nejaký akceptačný stav
- $v \approx_A w \iff f_v = f_w$
- funkcií $f : Q \to 2^Q \times 2^Q$ je len konečne veľa
- $\approx_A$ má konečný index
- $[w]_{\approx_A} \in \mathrm{REG}$

- nech $f_w(p) = (Q_1, Q_2)$, kde $Q_1 = \Delta(p, w)$ a $Q_2 =$ kam sa automat dostane cez nejaký akceptačný stav
- $v \approx_A w \iff f_v = f_w$
- funkcií $f : Q \to 2^Q \times 2^Q$ je len konečne veľa
- $\approx_A$ má konečný index
- $[w]_{\approx_A} \in \mathrm{REG}$

- nech $f_w(p) = (Q_1, Q_2)$, kde $Q_1 = \Delta(p, w)$ a $Q_2 =$ kam sa automat dostane cez nejaký akceptačný stav
- $v \approx_A w \iff f_v = f_w$
- funkcií $f : Q \to 2^Q \times 2^Q$ je len konečne veľa
- $\approx_A$ má konečný index
- $[w]_{\approx_A} \in \mathrm{REG}$

- $\forall w \in \Sigma^\omega$ patrí do $R \cdot S^\omega$ pre nejaké triedy ekvivalencie $\approx_A$
- nech $w_{i,j} = w_i w_{i+1} \cdots w_{j-1}$
- nekonečný kompletný graf, kde vrcholy sú prirodzené čísla; 1 farba pre každú triedu ekvivalencie $\approx_A$
- hranu z i do $j > i$ „ofarbíme“ triedou ekvivalencie $[w_{i,j}]_{\approx_A}$
- Ramsey: $\exists$nekonečná jednofarebná klika (nech $i_1, i_2, i_3, \ldots$ sú jej vrcholy)
- $w_{0,i_1} \in R = [w_{0,i_1}]_{\approx_A}$
- $w_{i_k,i_{k+1}}$ patria do $S = [w_{i_1,i_2}]_{\approx_A}$

- $\forall w \in \Sigma^\omega$ patrí do $R \cdot S^\omega$ pre nejaké triedy ekvivalencie $\approx_A$
- nech $w_{i,j} = w_i w_{i+1} \cdots w_{j-1}$
- nekonečný kompletný graf, kde vrcholy sú prirodzené čísla; 1 farba pre každú triedu ekvivalencie $\approx_A$
- hranu z i do $j > i$ „ofarbíme“ triedou ekvivalencie $[w_{i,j}]_{\approx_A}$
- Ramsey: $\exists$nekonečná jednofarebná klika (nech $i_1, i_2, i_3, \ldots$ sú jej vrcholy)
- $w_{0,i_1} \in R = [w_{0,i_1}]_{\approx_A}$
- $w_{i_k,i_{k+1}}$ patria do $S = [w_{i_1,i_2}]_{\approx_A}$

- $\forall w \in \Sigma^\omega$ patrí do $R \cdot S^\omega$ pre nejaké triedy ekvivalencie $\approx_A$
- nech $w_{i,j} = w_i w_{i+1} \cdots w_{j-1}$
- nekonečný kompletný graf, kde vrcholy sú prirodzené čísla; 1 farba pre každdú triedu ekvivalencie $\approx_A$
- hranu z i do $j > i$ „ofarbíme“ triedou ekvivalencie $[w_{i,j}]_{\approx_A}$
- Ramsey: $\exists$nekonečná jednofarebná klika (nech $i_1, i_2, i_3, \ldots$ sú jej vrcholy)
- $w_{0,i_1} \in R = [w_{0,i_1}]_{\approx_A}$
- $w_{i_k,i_{k+1}}$ patria do $S = [w_{i_1,i_2}]_{\approx_A}$

- $\forall w \in \Sigma^\omega$ patrí do $R \cdot S^\omega$ pre nejaké triedy ekvivalencie $\approx_A$
- nech $w_{i,j} = w_i w_{i+1} \cdots w_{j-1}$
- nekonečný kompletný graf, kde vrcholy sú prirodzené čísla; 1 farba pre každú triedu ekvivalencie $\approx_A$
- hranu z i do $j > i$ „ofarbíme“ triedou ekvivalencie $[w_{i,j}]_{\approx_A}$
- Ramsey: $\exists$nekonečná jednofarebná klika (nech $i_1, i_2, i_3, \ldots$ sú jej vrcholy)
- $w_{0,i_1} \in R = [w_{0,i_1}]_{\approx_A}$
- $w_{i_k,i_{k+1}}$ patria do $S = [w_{i_1,i_2}]_{\approx_A}$

- $\forall w \in \Sigma^\omega$ patrí do $R \cdot S^\omega$ pre nejaké triedy ekvivalencie $\approx_A$
- nech $w_{i,j} = w_i w_{i+1} \cdots w_{j-1}$
- nekonečný kompletný graf, kde vrcholy sú prirodzené čísla; 1 farba pre každú triedu ekvivalencie $\approx_A$
- hranu z i do $j > i$ „ofarbíme" triedou ekvivalencie $[w_{i,j}]_{\approx_A}$
- Ramsey: $\exists$nekonečná jednofarebná klika (nech $i_1, i_2, i_3, \ldots$ sú jej vrcholy)
- $w_{0,i_1} \in R = [w_{0,i_1}]_{\approx_A}$
- $w_{i_k,i_{k+1}}$ patria do $S = [w_{i_1,i_2}]_{\approx_A}$

- $\forall w \in \Sigma^\omega$ patrí do $R \cdot S^\omega$ pre nejaké triedy ekvivalencie $\approx_A$
- nech $w_{i,j} = w_i w_{i+1} \cdots w_{j-1}$
- nekonečný kompletný graf, kde vrcholy sú prirodzené čísla; 1 farba pre každú triedu ekvivalencie $\approx_A$
- hranu z i do $j > i$ „ofarbíme“ triedou ekvivalencie $[w_{i,j}]_{\approx_A}$
- Ramsey: $\exists$nekonečná jednofarebná klika (nech $i_1, i_2, i_3, \ldots$ sú jej vrcholy)
- $w_{0,i_1} \in R = [w_{0,i_1}]_{\approx_A}$
- $w_{i_k,i_{k+1}}$ patria do $S = [w_{i_1,i_2}]_{\approx_A}$

- $\forall w \in \Sigma^\omega$ patrí do $R \cdot S^\omega$ pre nejaké triedy ekvivalencie $\approx_A$
- nech $w_{i,j} = w_i w_{i+1} \cdots w_{j-1}$
- nekonečný kompletný graf, kde vrcholy sú prirodzené čísla; 1 farba pre každdú triedu ekvivalencie $\approx_A$
- hranu z i do $j > i$ „ofarbíme" triedou ekvivalencie $[w_{i,j}]_{\approx_A}$
- Ramsey: $\exists$nekonečná jednofarebná klika (nech $i_1, i_2, i_3, \ldots$ sú jej vrcholy)
- $w_{0,i_1} \in R = [w_{0,i_1}]_{\approx_A}$
- $w_{i_k,i_{k+1}}$ patria do $S = [w_{i_1,i_2}]_{\approx_A}$

- $\forall$triedy ekvivalencie R, S: $R \cdot S^\omega$ je buď celý pod L, alebo celý mimo L
- $\implies L$ aj $\overline{L}$ je zjednotenie konečne veľa $R_i \cdot S_i^\omega$
- nech $w \in L \cap R \cdot S^\omega$, nech ρ je akceptačný výpočet na w
- $\forall w' \in R \cdot S^\omega$ tiež patrí do L:
- $w = w_0 w_1 w_2 \cdots$, kde $w_0 \in R$ a $w_i \in S$ pre $i > 0$
- $w' = w'_0 w'_1 w'_2 \cdots$, kde $w'_0 \in R$ a $w'_i \in S$ pre $i > 0$
- nech q_{i+1} je stav po načítaní $w_0 \cdots w_i$

$$\rho : q_0 \overset{w_0}{\leadsto} q_1 \overset{w_1}{\leadsto}_F q_2 \overset{w_2}{\leadsto} q_3 \overset{w_3}{\leadsto} \cdots \overset{w_i}{\leadsto}_F \cdots \overset{w_j}{\leadsto}$$

$$\rho' : q_0 \overset{w'_0}{\leadsto} q_1 \overset{w'_1}{\leadsto}_F q_2 \overset{w'_2}{\leadsto} q_3 \overset{w_3}{\leadsto} \cdots \overset{w'_i}{\leadsto}_F \cdots \overset{w'_j}{\leadsto}$$

- $\implies w' \in L$

- $\forall$triedy ekvivalencie R, S: $R \cdot S^\omega$ je buď celý pod L, alebo celý mimo L
- $\Longrightarrow$ L aj $\overline{L}$ je zjednotenie konečne veľa $R_i \cdot S_i^\omega$
- nech $w \in L \cap R \cdot S^\omega$, nech ρ je akceptačný výpočet na w
- $\forall w' \in R \cdot S^\omega$ tiež patrí do L:
- $w = w_0 w_1 w_2 \cdots$, kde $w_0 \in R$ a $w_i \in S$ pre $i > 0$
- $w' = w'_0 w'_1 w'_2 \cdots$, kde $w'_0 \in R$ a $w'_i \in S$ pre $i > 0$
- nech q_{i+1} je stav po načítaní $w_0 \cdots w_i$

$$\rho : q_0 \overset{w_0}{\rightsquigarrow} q_1 \overset{w_1}{\rightsquigarrow}_F q_2 \overset{w_2}{\rightsquigarrow} q_3 \overset{w_3}{\rightsquigarrow} \cdots \overset{w_i}{\rightsquigarrow}_F \cdots \overset{w_j}{\rightsquigarrow}$$

$$\rho' : q_0 \overset{w'_0}{\rightsquigarrow} q_1 \overset{w'_1}{\rightsquigarrow}_F q_2 \overset{w'_2}{\rightsquigarrow} q_3 \overset{w_3}{\rightsquigarrow} \cdots \overset{w'_i}{\rightsquigarrow}_F \cdots \overset{w'_j}{\rightsquigarrow}$$

- $\Longrightarrow$ $w' \in L$

- $\forall$triedy ekvivalencie R, S: $R \cdot S^\omega$ je buď celý pod L, alebo celý mimo L
- $\Longrightarrow$ L aj $\overline{L}$ je zjednotenie konečne veľa $R_i \cdot S_i^\omega$
- nech $w \in L \cap R \cdot S^\omega$, nech ρ je akceptačný výpočet na w
- $\forall w' \in R \cdot S^\omega$ tiež patrí do L:
- $w = w_0 w_1 w_2 \cdots$, kde $w_0 \in R$ a $w_i \in S$ pre $i > 0$
- $w' = w'_0 w'_1 w'_2 \cdots$, kde $w'_0 \in R$ a $w'_i \in S$ pre $i > 0$
- nech q_{i+1} je stav po načítaní $w_0 \cdots w_i$

$$\rho : q_0 \overset{w_0}{\rightsquigarrow} q_1 \overset{w_1}{\rightsquigarrow}_F q_2 \overset{w_2}{\rightsquigarrow} q_3 \overset{w_3}{\rightsquigarrow} \cdots \overset{w_i}{\rightsquigarrow}_F \cdots \overset{w_j}{\rightsquigarrow}$$

$$\rho' : q_0 \overset{w'_0}{\rightsquigarrow} q_1 \overset{w'_1}{\rightsquigarrow}_F q_2 \overset{w'_2}{\rightsquigarrow} q_3 \overset{w_3}{\rightsquigarrow} \cdots \overset{w'_i}{\rightsquigarrow}_F \cdots \overset{w'_j}{\rightsquigarrow}$$

- $\Longrightarrow$ $w' \in L$

- $\forall$triedy ekvivalencie R, S: $R \cdot S^\omega$ je buď celý pod L, alebo celý mimo L
- $\Longrightarrow$ L aj $\overline{L}$ je zjednotenie konečne veľa $R_i \cdot S_i^\omega$
- nech $w \in L \cap R \cdot S^\omega$, nech ρ je akceptačný výpočet na w
- $\forall w' \in R \cdot S^\omega$ tiež patrí do L:
- $w = w_0 w_1 w_2 \cdots$, kde $w_0 \in R$ a $w_i \in S$ pre $i > 0$
- $w' = w'_0 w'_1 w'_2 \cdots$, kde $w'_0 \in R$ a $w'_i \in S$ pre $i > 0$
- nech q_{i+1} je stav po načítaní $w_0 \cdots w_i$

$$\rho : q_0 \overset{w_0}{\rightsquigarrow} q_1 \overset{w_1}{\rightsquigarrow}_F q_2 \overset{w_2}{\rightsquigarrow} q_3 \overset{w_3}{\rightsquigarrow} \cdots \overset{w_i}{\rightsquigarrow}_F \cdots \overset{w_j}{\rightsquigarrow}$$

$$\rho' : q_0 \overset{w'_0}{\rightsquigarrow} q_1 \overset{w'_1}{\rightsquigarrow}_F q_2 \overset{w'_2}{\rightsquigarrow} q_3 \overset{w_3}{\rightsquigarrow} \cdots \overset{w'_i}{\rightsquigarrow}_F \cdots \overset{w'_j}{\rightsquigarrow}$$

- $\Longrightarrow$ $w' \in L$

- $\forall$triedy ekvivalencie R, S: $R \cdot S^\omega$ je buď celý pod L, alebo celý mimo L
- $\Longrightarrow$ L aj $\overline{L}$ je zjednotenie konečne veľa $R_i \cdot S_i^\omega$
- nech $w \in L \cap R \cdot S^\omega$, nech ρ je akceptačný výpočet na w
- $\forall w' \in R \cdot S^\omega$ tiež patrí do L:
- $w = w_0 w_1 w_2 \cdots$, kde $w_0 \in R$ a $w_i \in S$ pre $i > 0$
- $w' = w'_0 w'_1 w'_2 \cdots$, kde $w'_0 \in R$ a $w'_i \in S$ pre $i > 0$
- nech q_{i+1} je stav po načítaní $w_0 \cdots w_i$

$$\rho : q_0 \overset{w_0}{\rightsquigarrow} q_1 \overset{w_1}{\rightsquigarrow}_F q_2 \overset{w_2}{\rightsquigarrow} q_3 \overset{w_3}{\rightsquigarrow} \cdots \overset{w_i}{\rightsquigarrow}_F \cdots \overset{w_j}{\rightsquigarrow}$$

$$\rho' : q_0 \overset{w'_0}{\rightsquigarrow} q_1 \overset{w'_1}{\rightsquigarrow}_F q_2 \overset{w'_2}{\rightsquigarrow} q_3 \overset{w_3}{\rightsquigarrow} \cdots \overset{w'_i}{\rightsquigarrow}_F \cdots \overset{w'_j}{\rightsquigarrow}$$

- $\Longrightarrow w' \in L$

- $\forall$triedy ekvivalencie R, S: $R \cdot S^\omega$ je buď celý pod L, alebo celý mimo L
- $\Longrightarrow$ L aj $\overline{L}$ je zjednotenie konečne veľa $R_i \cdot S_i^\omega$
- nech $w \in L \cap R \cdot S^\omega$, nech ρ je akceptačný výpočet na w
- $\forall w' \in R \cdot S^\omega$ tiež patrí do L:
- $w = w_0 w_1 w_2 \cdots$, kde $w_0 \in R$ a $w_i \in S$ pre $i > 0$
- $w' = w'_0 w'_1 w'_2 \cdots$, kde $w'_0 \in R$ a $w'_i \in S$ pre $i > 0$
- nech q_{i+1} je stav po načítaní $w_0 \cdots w_i$

$$\rho : q_0 \overset{w_0}{\leadsto} q_1 \overset{w_1}{\leadsto}_F q_2 \overset{w_2}{\leadsto} q_3 \overset{w_3}{\leadsto} \cdots \overset{w_i}{\leadsto}_F \cdots \overset{w_j}{\leadsto}$$

$$\rho' : q_0 \overset{w'_0}{\leadsto} q_1 \overset{w'_1}{\leadsto}_F q_2 \overset{w'_2}{\leadsto} q_3 \overset{w_3}{\leadsto} \cdots \overset{w'_i}{\leadsto}_F \cdots \overset{w'_j}{\leadsto}$$

- $\Longrightarrow w' \in L$

- $\forall$triedy ekvivalencie R, S: $R \cdot S^{\omega}$ je buď celý pod L, alebo celý mimo L
- $\Longrightarrow$ L aj $\overline{L}$ je zjednotenie konečne veľa $R_i \cdot S_i^{\omega}$
- nech $w \in L \cap R \cdot S^{\omega}$, nech ρ je akceptačný výpočet na w
- $\forall w' \in R \cdot S^{\omega}$ tiež patrí do L:
- $w = w_0 w_1 w_2 \cdots$, kde $w_0 \in R$ a $w_i \in S$ pre $i > 0$
- $w' = w'_0 w'_1 w'_2 \cdots$, kde $w'_0 \in R$ a $w'_i \in S$ pre $i > 0$
- nech q_{i+1} je stav po načítaní $w_0 \cdots w_i$

$$\rho : q_0 \overset{w_0}{\rightsquigarrow} q_1 \overset{w_1}{\rightsquigarrow}_F q_2 \overset{w_2}{\rightsquigarrow} q_3 \overset{w_3}{\rightsquigarrow} \cdots \overset{w_i}{\rightsquigarrow}_F \cdots \overset{w_j}{\rightsquigarrow}$$

$$\rho' : q_0 \overset{w'_0}{\rightsquigarrow} q_1 \overset{w'_1}{\rightsquigarrow}_F q_2 \overset{w'_2}{\rightsquigarrow} q_3 \overset{w_3}{\rightsquigarrow} \cdots \overset{w'_i}{\rightsquigarrow}_F \cdots \overset{w'_j}{\rightsquigarrow}$$

- $\Longrightarrow$ $w' \in L$

- $\forall$triedy ekvivalencie R, S: $R \cdot S^\omega$ je buď celý pod L, alebo celý mimo L
- $\Longrightarrow$ L aj $\overline{L}$ je zjednotenie konečne veľa $R_i \cdot S_i^\omega$
- nech $w \in L \cap R \cdot S^\omega$, nech ρ je akceptačný výpočet na w
- $\forall w' \in R \cdot S^\omega$ tiež patrí do L:
- $w = w_0 w_1 w_2 \cdots$, kde $w_0 \in R$ a $w_i \in S$ pre $i > 0$
- $w' = w'_0 w'_1 w'_2 \cdots$, kde $w'_0 \in R$ a $w'_i \in S$ pre $i > 0$
- nech q_{i+1} je stav po načítaní $w_0 \cdots w_i$

$$\rho : q_0 \overset{w_0}{\leadsto} q_1 \overset{w_1}{\leadsto}_F q_2 \overset{w_2}{\leadsto} q_3 \overset{w_3}{\leadsto} \cdots \overset{w_i}{\leadsto}_F \cdots \overset{w_j}{\leadsto}$$

$$\rho' : q_0 \overset{w'_0}{\leadsto} q_1 \overset{w'_1}{\leadsto}_F q_2 \overset{w'_2}{\leadsto} q_3 \overset{w_3}{\leadsto} \cdots \overset{w'_i}{\leadsto}_F \cdots \overset{w'_j}{\leadsto}$$

- $\Longrightarrow$ $w' \in L$

- $\forall$triedy ekvivalencie R, S: $R \cdot S^\omega$ je buď celý pod L, alebo celý mimo L
- $\Longrightarrow$ L aj $\overline{L}$ je zjednotenie konečne veľa $R_i \cdot S_i^\omega$
- nech $w \in L \cap R \cdot S^\omega$, nech ρ je akceptačný výpočet na w
- $\forall w' \in R \cdot S^\omega$ tiež patrí do L:
- $w = w_0 w_1 w_2 \cdots$, kde $w_0 \in R$ a $w_i \in S$ pre $i > 0$
- $w' = w'_0 w'_1 w'_2 \cdots$, kde $w'_0 \in R$ a $w'_i \in S$ pre $i > 0$
- nech q_{i+1} je stav po načítaní $w_0 \cdots w_i$

$$\rho : q_0 \overset{w_0}{\rightsquigarrow} q_1 \overset{w_1}{\rightsquigarrow}_F q_2 \overset{w_2}{\rightsquigarrow} q_3 \overset{w_3}{\rightsquigarrow} \cdots \overset{w_i}{\rightsquigarrow}_F \cdots \overset{w_j}{\rightsquigarrow}$$

$$\rho' : q_0 \overset{w'_0}{\rightsquigarrow} q_1 \overset{w'_1}{\rightsquigarrow}_F q_2 \overset{w'_2}{\rightsquigarrow} q_3 \overset{w_3}{\rightsquigarrow} \cdots \overset{w'_i}{\rightsquigarrow}_F \cdots \overset{w'_j}{\rightsquigarrow}$$

- $\Longrightarrow$ $w' \in L$

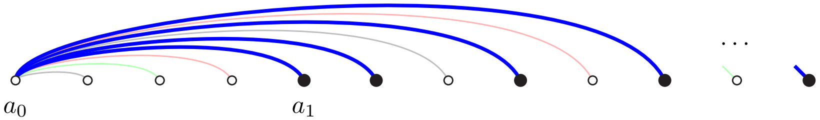
Dôsledok

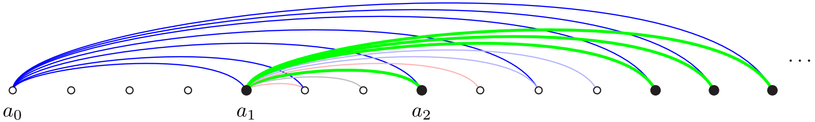
Teória S1S je rozhodnuteľná v čase $2 \uparrow\uparrow O(n)$.

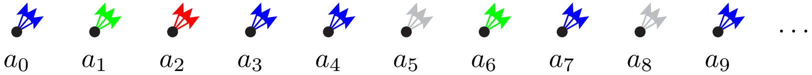
Veta (Nekonečná Ramseyho veta)

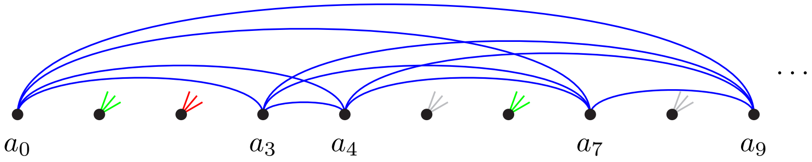
Predstavme si nekonečný kompletný graf, kde vrcholy sú prirodzené čísla a hrany ofarbime k (konečne veľa) farbami. Nech tento graf ofarbíme akokoľvek, vždy bude obsahovať nekonečnú jednofarebnú kliku.

■ **Dôkaz.**


a_0
a_1
...


a_0
a_1
a_2
...


a_0
a_1
a_2
a_3
a_4
a_5
a_6
a_7
a_8
a_9
$\dots$


a_0
a_3
a_4
a_7
a_9
$\cdots$

				rozhodnutelné					*nerozhodnutelné*	
coNP	PSPACE	EXP	EXPSPACE	2EXP	2EXPSPACE	ELEMENTARY	PR	REC	RE	AH
TAUT	QBF	$\mathrm{Th}(\mathbb{R},+,\leq)$		$\mathrm{Th}(\mathbb{N},+,=)$	$\mathrm{Th}(\mathbb{N},\cdot,=)$		S1S		$\mathrm{Th}(\mathbb{N},+,\cdot,=)$ aritmetika	
	LTL		$\mathrm{Th}(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$						$\mathrm{Th}(\mathbb{Q},+,\cdot,=)$ druhého rádu	
	$\mathrm{Th}(\mathbb{R},\leq)$								$\mathrm{Th}(\mathbb{N},s,\backslash,=)$	
										dyad. S1S