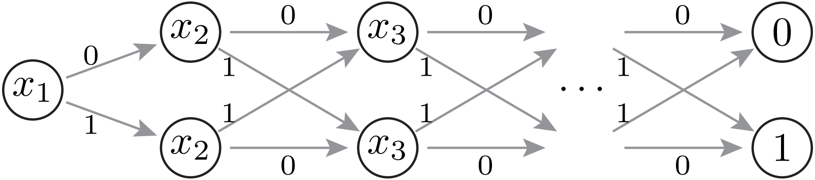
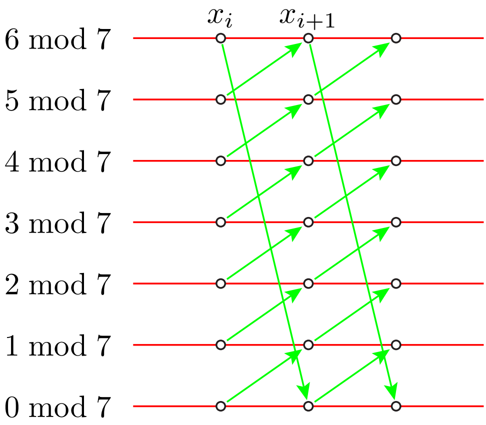
Vetviace programy

kuko

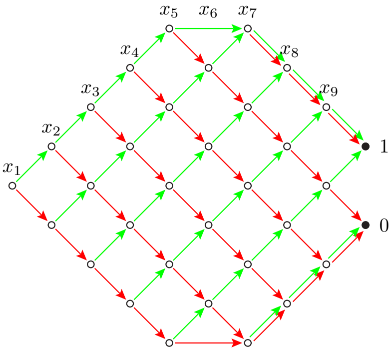
31.3.2021

Pokročilá teória zložitosti


x_1
x_2
x_2
x_3
x_3
0
1



x_i
x_{i+1}
6 mod 7
5 mod 7
4 mod 7
3 mod 7
2 mod 7
1 mod 7
0 mod 7


x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x_6
x_7
x_8
x_9
1
0

PBP $\subseteq$ P/poly

$$\mathsf{PBP} = \mathsf{L}/\mathsf{poly}$$

$$\text{unif-}\mathsf{PBP} = \mathsf{L}$$

$$\mathsf{PBP} = \mathsf{L}/\mathsf{poly}$$

$$\text{unif-}\mathsf{PBP} = \mathsf{L}$$

k-PBP – polynomiálne veľké vetviace programy šírky k

- REG $\subseteq$ k-PBP
- $\textsc{Palindrome}, \{a^n b^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\} \in$ 3PBP
- $\textsc{And}, \textsc{Or}, \textsc{Parity} \in$ 2PBP
- Každá funkcia sa dá vypočítať BP exponenciálnej dĺžky, šírky 3.
- $\textsc{Mod}_m$ vieme v šírke m, dá sa menej?
- $\textsc{Majority}$ vieme v šírke $\Theta(n)$, dá sa menej?
- čo sa dá spočítať v k-PBP?

- REG $\subseteq k$-PBP
- $\textsc{Palindrome}, \{a^n b^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\} \in$ 3PBP
- $\textsc{And}, \textsc{Or}, \textsc{Parity} \in$ 2PBP
- Každá funkcia sa dá vypočítať BP exponenciálnej dĺžky, šírky 3.
- $\textsc{Mod}_m$ vieme v šírke m, dá sa menej?
- $\textsc{Majority}$ vieme v šírke $\Theta(n)$, dá sa menej?
- čo sa dá spočítať v k-PBP?

- $\mathrm{REG} \subseteq k$-PBP
- $\textsc{Palindrome}, \{a^n b^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\} \in 3\mathrm{PBP}$
- $\textsc{And}, \textsc{Or}, \textsc{Parity} \in 2\mathrm{PBP}$
- Každá funkcia sa dá vypočítať BP exponenciálnej dĺžky, šírky 3.
- $\textsc{Mod}_m$ vieme v šírke m, dá sa menej?
- $\textsc{Majority}$ vieme v šírke $\Theta(n)$, dá sa menej?
- čo sa dá spočítať v k-PBP?

- REG $\subseteq$ k-PBP
- $\textsc{Palindrome}, \{a^n b^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\} \in$ 3PBP
- $\textsc{And}, \textsc{Or}, \textsc{Parity} \in$ 2PBP
- Každá funkcia sa dá vypočítať BP exponenciálnej dĺžky, šírky 3.
- $\textsc{Mod}_m$ vieme v šírke m, dá sa menej?
- $\textsc{Majority}$ vieme v šírke $\Theta(n)$, dá sa menej?
- čo sa dá spočítať v k-PBP?

- REG $\subseteq$ k-PBP
- $\textsc{Palindrome}, \{a^n b^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\} \in$ 3PBP
- $\textsc{And}, \textsc{Or}, \textsc{Parity} \in$ 2PBP
- Každá funkcia sa dá vypočítať BP exponenciálnej dĺžky, šírky 3.
- $\textsc{Mod}_m$ vieme v šírke m, dá sa menej?
- $\textsc{Majority}$ vieme v šírke $\Theta(n)$, dá sa menej?
- čo sa dá spočítať v k-PBP?

- REG $\subseteq k$-PBP
- $\textsc{Palindrome}, \{a^n b^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\} \in$ 3PBP
- $\textsc{And}, \textsc{Or}, \textsc{Parity} \in$ 2PBP
- Každá funkcia sa dá vypočítať BP exponenciálnej dĺžky, šírky 3.
- $\textsc{Mod}_m$ vieme v šírke m, dá sa menej?
- $\textsc{Majority}$ vieme v šírke $\Theta(n)$, dá sa menej?
- čo sa dá spočítať v k-PBP?

- $\mathsf{REG} \subseteq k\text{-PBP}$
- $\textsc{Palindrome}, \{a^n b^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\} \in 3\text{PBP}$
- $\textsc{And}, \textsc{Or}, \textsc{Parity} \in 2\text{PBP}$
- Každá funkcia sa dá vypočítať BP exponenciálnej dĺžky, šírky 3.
- $\textsc{Mod}_m$ vieme v šírke m, dá sa menej?
- $\textsc{Majority}$ vieme v šírke $\Theta(n)$, dá sa menej?
- čo sa dá spočítať v k-PBP?

Veta (Barrington '89)

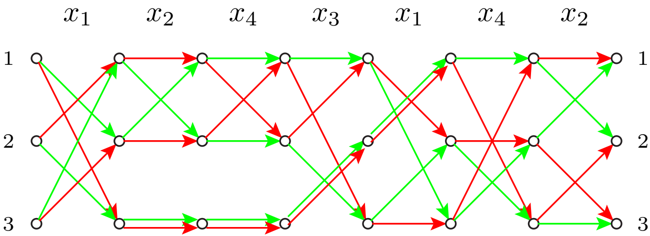
$\forall$*obvod hĺbky d* $\exists$*ekvivalentný BP šírky 5 dĺžky* $\ell = 4^d$*.*

To znamená pre $d = O(\log n)$ *je* $\ell = \mathrm{poly}(n)$ *a teda*
$\mathrm{NC}^1 = 5\text{-PBP} = k\text{-PBP}$.

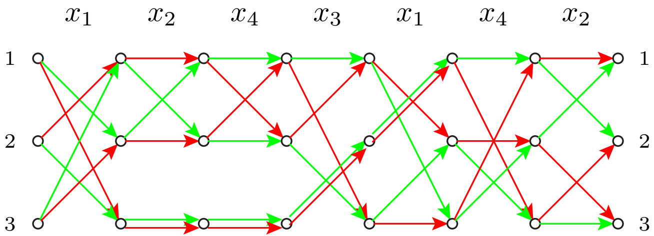
Veta (Barrington '89)

$\forall$*obvod hĺbky* d $\exists$*ekvivalentný BP šírky 5 dĺžky* $\ell = 4^d$.
To znamená pre $d = O(\log n)$ *je* $\ell = \mathrm{poly}(n)$ *a teda*
$\mathrm{NC}^1 = 5\text{-PBP} = k\text{-PBP}$.

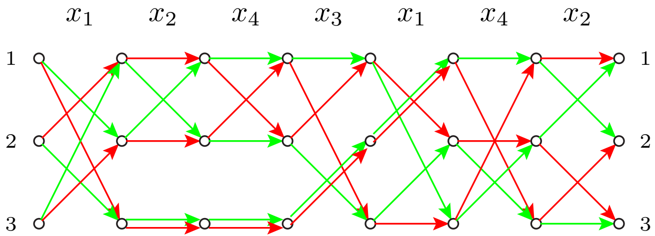
Permutačné programy



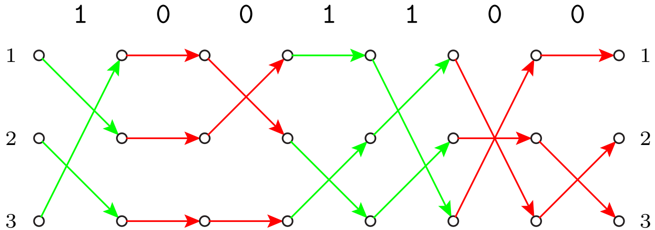
π_1^0	π_2^0	π_3^0	$\cdots$	π_ℓ^0
π_1^1	π_2^1	π_3^1	$\cdots$	π_ℓ^1
k_1	k_2	k_3	$\cdots$	k_ℓ



$$\begin{array}{ccccc}
\pi_1^0 & \pi_2^0 & \pi_3^0 & \cdots & \pi_\ell^0 \\
\pi_1^1 & \pi_2^1 & \pi_3^1 & \cdots & \pi_\ell^1 \\
k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_\ell
\end{array}$$



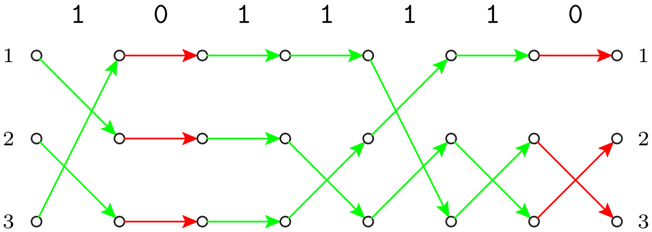
(132)	id	(12)	(132)	(12)	(13)	(23)
(123)	(12)	id	(23)	(132)	(23)	(12)
1	2	4	3	1	4	2



id (12) (13) (23)

(123) (23) (132)

1 2 4 3 1 4 2



	id					(23)
(123)		id	(23)	(132)	(23)	
1	2	4	3	1	4	2

$$f(x) = 0 \implies \prod_{i=1}^{\ell} \pi_i^{x_{k_i}} = 1_G$$

$$f(x) = 1 \implies \prod_{i=1}^{\ell} \pi_i^{x_{k_i}} = \alpha$$

$$\prod \pi_i^{x_{k_i}} = \alpha^{f(x)}.$$

$$f(x) = 0 \implies \prod_{i=1}^{\ell} \pi_i^{x_{k_i}} = 1_G$$

$$f(x) = 1 \implies \prod_{i=1}^{\ell} \pi_i^{x_{k_i}} = \alpha$$

$$\prod \pi_i^{x_{k_i}} = \alpha^{f(x)}.$$

Lema

Nech α, β sú 5-cykly.
Potom f je α-vypočítateľná programom dĺžky ℓ

$$\iff$$

f je β-vypočítateľná programom dĺžky ℓ.

Dôkaz. $\alpha = \rho \circ \beta \circ \rho^{-1}$ □

Lema

Nech α, β sú 5-cykly.
Potom f je α-vypočítateľná programom dĺžky ℓ

$$\iff$$

f je β-vypočítateľná programom dĺžky ℓ.

Dôkaz. $\alpha = \rho \circ \beta \circ \rho^{-1}$ □

Lema

Nech α, β sú 5-cykly.
Potom f je α-vypočítateľná programom dĺžky ℓ

$$\Longleftrightarrow$$

f je β-vypočítateľná programom dĺžky ℓ.

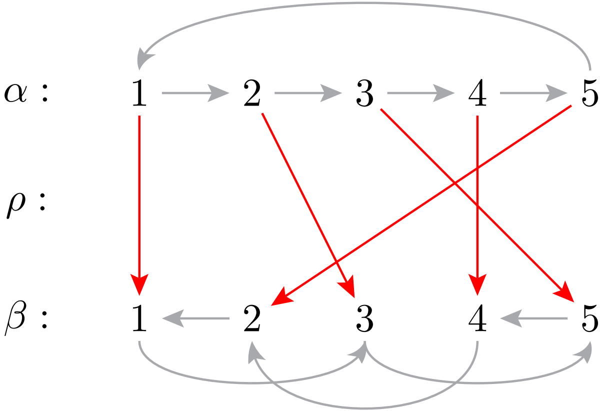
Dôkaz. $\alpha = \rho \circ \beta \circ \rho^{-1}$ $\square$

$\alpha :$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 5 \arrow[llll, bend right] \end{tikzcd}$$

$\beta :$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, bend right] & 2 \arrow[l] & 3 \arrow[rr, bend right] & 4 \arrow[ll, bend left] & 5 \arrow[l] \end{tikzcd}$$


α :
1 2 3 4 5
ρ :
β :
1 2 3 4 5

$$
\begin{tikzcd}
\alpha: & 1 \arrow[r] \arrow[d] & 2 \arrow[r] \arrow[d] & 3 \arrow[r] \arrow[d] & 4 \arrow[r] \arrow[d] & 5 \arrow[d] \arrow[llll, bend right] \\
\rho: & & & & & \\
\beta: & 1 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 5 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 2 \arrow[llll, bend left]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
\pi_1^0 & \pi_2^0 & \pi_3^0 & \cdots & \pi_\ell^0 \\
\pi_1^1 & \pi_2^1 & \pi_3^1 & \cdots & \pi_\ell^1 \\
k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_\ell
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
\rho \circ \pi_1^0 & \pi_2^0 & \pi_3^0 & \cdots & \pi_\ell^0 \circ \rho^{-1} \\
\rho \circ \pi_1^1 & \pi_2^1 & \pi_3^1 & \cdots & \pi_\ell^1 \circ \rho^{-1} \\
k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_\ell
\end{array}
$$

Lema

Ak f *je* α*-vypočítateľná programom dĺžky* ℓ

$$\Longrightarrow$$

aj $\neg f$ *je* α*-vypočítateľná programom dĺžky* ℓ.

$$
\begin{array}{ccccc}
\pi_1^0 & \pi_2^0 & \pi_3^0 & \cdots & \pi_\ell^0 \\
\pi_1^1 & \pi_2^1 & \pi_3^1 & \cdots & \pi_\ell^1 \\
k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_\ell
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
\pi_1^0 & \pi_2^0 & \pi_3^0 & \cdots & \pi_\ell^0 \circ \alpha^{-1} \\
\pi_1^1 & \pi_2^1 & \pi_3^1 & \cdots & \pi_\ell^1 \circ \alpha^{-1} \\
k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_\ell
\end{array}
$$

Lema

Ak f, g sú α, β-vypočítateľné programom dĺžky ℓ

$$\Longrightarrow$$

$f \wedge g$ je $(\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1})$-vypočítateľná programom dĺžky 4ℓ.

$$\alpha = 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 1$$

$$\beta = 1 \to 3 \to 5 \to 4 \to 2 \to 1$$

$$\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1 \to 3 \to 2 \to 5 \to 4 \to 1$$

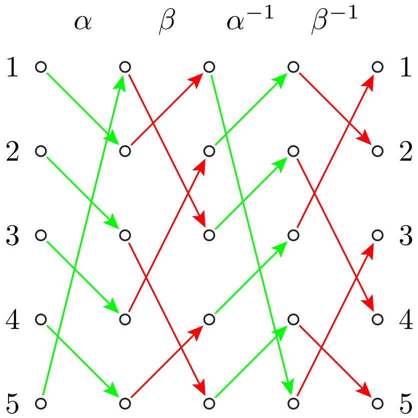
Lema

Ak f, g sú α, β-vypočítateľné programom dĺžky ℓ

$$\Longrightarrow$$

$f \wedge g$ je $(\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1})$-vypočítateľná programom dĺžky 4ℓ.

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 1 \\ \beta &= 1 \to 3 \to 5 \to 4 \to 2 \to 1 \\ \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} &= 1 \to 3 \to 2 \to 5 \to 4 \to 1 \end{aligned}$$



$$\alpha = 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 1$$
$$\beta = 1 \to 3 \to 5 \to 4 \to 2 \to 1$$
$$\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1 \to 3 \to 2 \to 5 \to 4 \to 1$$

Dôsledky

Dôsledok

$\exists L \in \mathrm{REG}$: *L je* NC^1*-úplný pri* $\leq_m^{\mathrm{AC}^0}$*-redukcií.*
Každý NC^1 *jazyk sa dá* AC^0 *obvodom zredukovať na* REG *jazyk.*

Veta

Majme funkciu danú algebraickým obvodom hĺbky d. Tá istá funkcia sa dá vypočítať súčinom 4^d matíc 3×3. Funkcie vypočítateľné algebraickými NC^1 obvodmi sú presne tie, ktoré sa dajú spočítať súčinom polynomiálneho počtu matíc 3×3.

■ **Dôkaz.**

Rekurzívne: majme pre f, g matice tvaru

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ g & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f+g & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = F \cdot G$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f \times g & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -f & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & g & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -g \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot G \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pre $K = (\mathbb{Z}_2, \cdot, +) = (\mathbb{Z}_2, \wedge, \oplus)$ dostávame Barringtonovu vetu

Rekurzívne: majme pre f, g matice tvaru

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ g & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f+g & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = F \cdot G$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f \times g & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -f & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & g & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -g \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot G \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pre $K = (\mathbb{Z}_2, \cdot, +) = (\mathbb{Z}_2, \wedge, \oplus)$ dostávame Barringtonovu vetu

Rekurzívne: majme pre f, g matice tvaru

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ g & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f+g & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = F \cdot G$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f \times g & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -f & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & g & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -g \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot G \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pre $K = (\mathbb{Z}_2, \cdot, +) = (\mathbb{Z}_2, \wedge, \oplus)$ dostávame Barringtonovu vetu

Rekurzívne: majme pre f, g matice tvaru

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ g & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f+g & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = F \cdot G$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f \times g & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -f & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & g & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -g \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot G \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pre $K = (\mathbb{Z}_2, \cdot, +) = (\mathbb{Z}_2, \wedge, \oplus)$ dostávame Barringtonovu vetu

Rekurzívne: majme pre f, g matice tvaru

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ g & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f+g & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = F \cdot G$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f \times g & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -f & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & g & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -g \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot G \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pre $K = (\mathbb{Z}_2, \cdot, +) = (\mathbb{Z}_2, \wedge, \oplus)$ dostávame Barringtonovu vetu

Uvažujme lineárne (algebraické) programy:

- r registrov $R_1, \ldots, R_r$
- inštrukcie
  - $R_i \mathrel{+}= c \cdot R_j$
  - $R_i \mathrel{-}= c \cdot R_j$
  - $R_i \mathrel{+}= x_k \cdot R_j$
  - $R_i \mathrel{-}= x_k \cdot R_j$

Veta

Každá funkcia s algebraickým obvodom hĺbky d sa dá spočítať algebraickým programom dĺžky $O(4^d)$ s iba tromi registrami.

Dôkaz.

- indukciou: vieme vyrobiť program $R_i \pm= R_j \cdot f(x_1, \dots, x_n)$
- program pre $R_i += R_j \cdot (f+g)$:
  $R_i += R_j \cdot f$; $R_i += R_j \cdot g$
- program pre $R_i += R_j \cdot (f \cdot g)$, spočítame

$$
\begin{array}{ll}
R_i -= R_k \cdot g & //R_i = r_i - r_k \cdot g \\
R_k += R_j \cdot f & //R_k = r_k + r_j \cdot f \\
R_i += R_k \cdot g & //R_i = r_i - r_k \cdot g + (r_k + r_j \cdot f) \cdot g \\
R_k -= R_j \cdot f & //R_k = r_k
\end{array}
$$

Veta

Každá funkcia s algebraickým obvodom hĺbky d sa dá spočítať algebraickým programom dĺžky $O(4^d)$ s iba tromi registrami.

Dôkaz.

- indukciou: vieme vyrobiť program $R_i \pm= R_j \cdot f(x_1, \ldots, x_n)$
- program pre $R_i += R_j \cdot (f+g)$:
  $R_i += R_j \cdot f$; $R_i += R_j \cdot g$
- program pre $R_i += R_j \cdot (f \cdot g)$, spočítame

$$
\begin{array}{ll}
R_i -= R_k \cdot g & //R_i = r_i - r_k \cdot g \\
R_k += R_j \cdot f & //R_k = r_k + r_j \cdot f \\
R_i += R_k \cdot g & //R_i = r_i - r_k \cdot g + (r_k + r_j \cdot f) \cdot g \\
R_k -= R_j \cdot f & //R_k = r_k
\end{array}
$$

Veta

Každá funkcia s algebraickým obvodom hĺbky d sa dá spočítať algebraickým programom dĺžky $O(4^d)$ s iba tromi registrami.

■ **Dôkaz.**

- indukciou: vieme vyrobiť program $R_i \pm= R_j \cdot f(x_1, \ldots, x_n)$
- program pre $R_i += R_j \cdot (f + g)$:
  $R_i += R_j \cdot f$; $R_i += R_j \cdot g$
- program pre $R_i += R_j \cdot (f \cdot g)$, spočítame

$$
\begin{array}{ll}
R_i -= R_k \cdot g & //R_i = r_i - r_k \cdot g \\
R_k += R_j \cdot f & //R_k = r_k + r_j \cdot f \\
R_i += R_k \cdot g & //R_i = r_i - r_k \cdot g + (r_k + r_j \cdot f) \cdot g \\
R_k -= R_j \cdot f & //R_k = r_k
\end{array}
$$

Veta

Každá funkcia s algebraickým obvodom hĺbky d sa dá spočítať algebraickým programom dĺžky $O(4^d)$ s iba tromi registrami.

■ **Dôkaz.**

- indukciou: vieme vyrobiť program $R_i \pm= R_j \cdot f(x_1, \ldots, x_n)$
- program pre $R_i += R_j \cdot (f + g)$:
  $R_i += R_j \cdot f$; $R_i += R_j \cdot g$
- program pre $R_i += R_j \cdot (f \cdot g)$, spočítame

$$
\begin{array}{ll}
R_i -= R_k \cdot g & //R_i = r_i - r_k \cdot g \\
R_k += R_j \cdot f & //R_k = r_k + r_j \cdot f \\
R_i += R_k \cdot g & //R_i = r_i - r_k \cdot g + (r_k + r_j \cdot f) \cdot g \\
R_k -= R_j \cdot f & //R_k = r_k
\end{array}
$$

Predstavme si počítač, ktorý

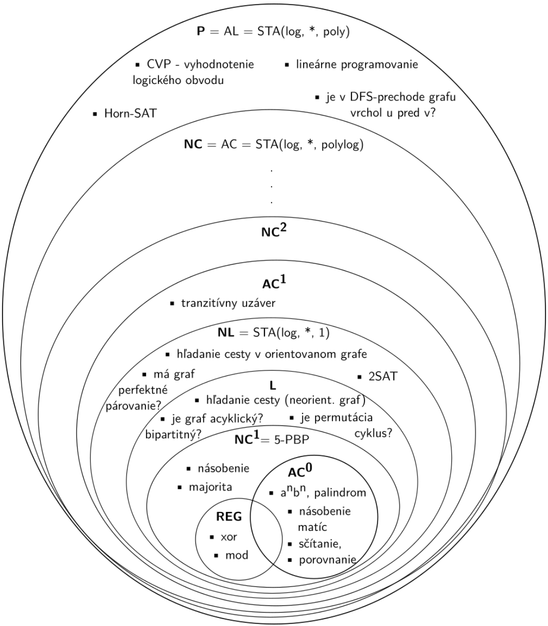
- môže počítať celý „deň“, ale
- RAM – každú noc sa vymaže
- malé bezpečné úložisko (hard-disk)
- jedno počítadlo – každú noc $+1$

logspace serializovateľné:

- každá fáza je v logaritmickej pamäti
- bezpečné úložisko má 3 bity (slovom: tri bity!)
- počítadlo má polynomiálny počet bitov.

Veta

Všetky problémy v PSPACE *sú logspace serializovateľné.*


P = AL = STA(log, *, poly)
CVP - vyhodnotenie logického obvodu
lineárne programovanie
je v DFS-prechode grafu vrchol u pred v?
Horn-SAT
NC = AC = STA(log, *, polylog)
NC2
AC1
tranzitívny uzáver
NL = STA(log, *, 1)
hľadanie cesty v orientovanom grafe
má graf perfektné párovanie?
2SAT
L
hľadanie cesty (neorient. graf)
je graf acyklický? bipartitný?
je permutácia cyklus?
NC1 = 5-PBP
násobenie
majorita
AC0
anbn, palindrom
násobenie matíc
sčítanie,
porovnanie
REG
xor
mod