

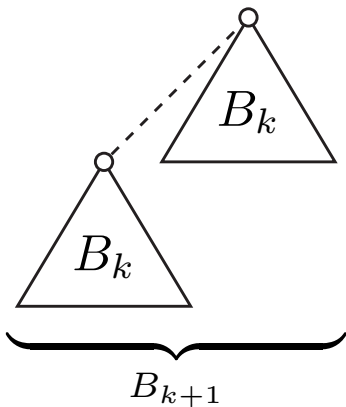
Binomiálna halda

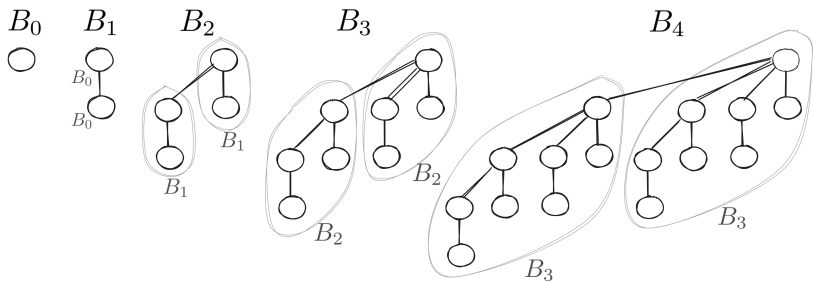
kuko

8.10.2025

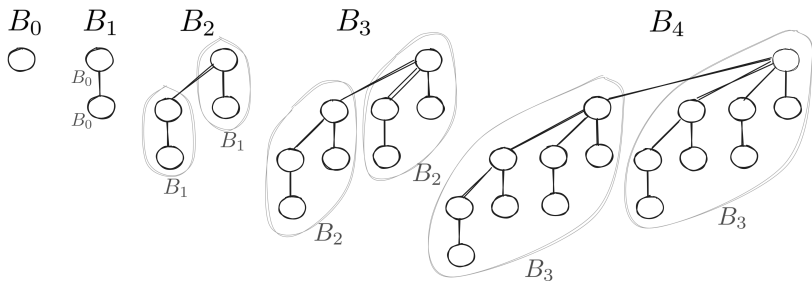
Vybrané partie z dátových štruktúr

\circ
 B_0

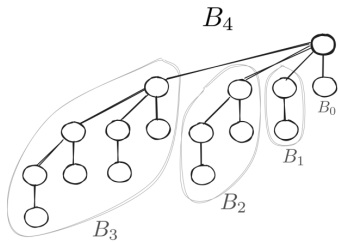
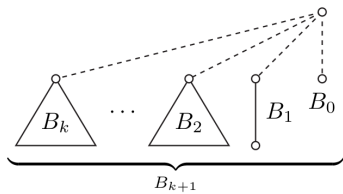




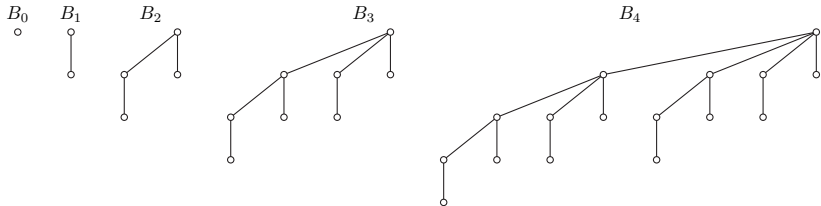
- $|B_k| = 2^k$
- výška B_k je k
- deti koreňa sú B_{k-1}, \dots, B_1, B_0



- $|B_k| = 2^k$
- výška B_k je k
- deti koreňa sú B_{k-1}, \dots, B_1, B_0



- zložená z binomiálnych stromov
- každý takýto strom musí mať haldovité usporiadanie
- každý strom má iný rád



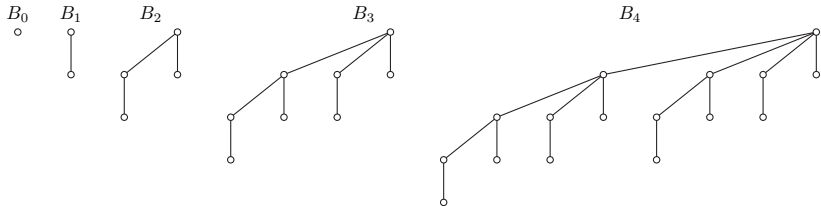
Tvar haldy závisí od binárneho zápisu n :

Napr. $n = 41 = (101001)_2 = 32 + 8 + 1 = 2^5 + 2^3 + 2^0$,

$n = 75 = (1001011)_2 = 64 + 8 + 2 + 1 = 2^6 + 2^3 + 2^1 + 2^0$.

Dôsledky:

- najväčší strom B_k , ktorý halda obsahuje má $k \leq \log_2 n$
- stromov v halde je najviac $\log_2 n$



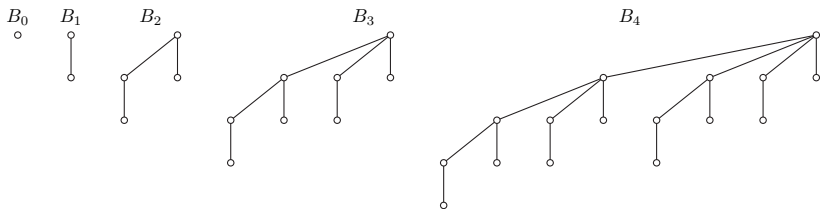
Tvar haldy závisí od binárneho zápisu n :

Napr. $n = 41 = (101001)_2 = 32 + 8 + 1 = 2^5 + 2^3 + 2^0$,

$n = 75 = (1001011)_2 = 64 + 8 + 2 + 1 = 2^6 + 2^3 + 2^1 + 2^0$.

Dôsledky:

- najväčší strom B_k , ktorý halda obsahuje má $k \leq \log_2 n$
- stromov v halde je najviac $\log_2 n$



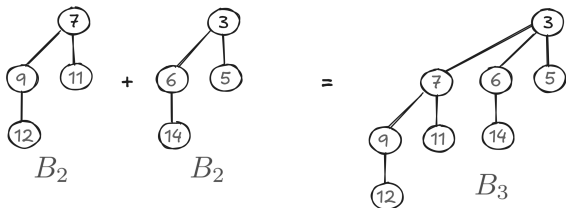
Tvar haldy závisí od binárneho zápisu n :

Napr. $n = 41 = (101001)_2 = 32 + 8 + 1 = 2^5 + 2^3 + 2^0$,

$n = 75 = (1001011)_2 = 64 + 8 + 2 + 1 = 2^6 + 2^3 + 2^1 + 2^0$.

Dôsledky:

- najväčší strom B_k , ktorý halda obsahuje má $k \leq \log_2 n$
- stromov v halde je najviac $\log_2 n$



napr. $41+75=$

$$\begin{array}{r} \\ + \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{merge} \\ \text{with} \\ \hline \end{array}$$

napr. $41+75=$

$$\begin{array}{r} \\ + \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{merge} \\ \text{with} \\ \hline \\ \end{array}$$

binom. halda

merge	$O(\log n)$
insert	$O(\log n)$
extract-min	$O(\log n)$
decrease-key	$O(\log n)$

	binom. halda	
merge	$O(\log n)$	$O(1)$ am.
insert	$O(\log n)$	$O(1)$ am.
extract-min	$O(\log n)$	$O(\log n)$ am.
decrease-key	$O(\log n)$	$O(\log n)$

	binom. halda	lenivá bin. halda
merge	$O(\log n)$	$O(1)$ am.
insert	$O(\log n)$	$O(1)$ am.
extract-min	$O(\log n)$	$O(\log n)$ am.
decrease-key	$O(\log n)$	$O(\log n)$

Lenivá binomiálna halda

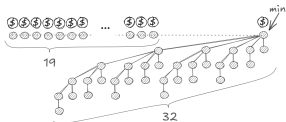
INVARIANT: Každý koreň stromu má 1\$.

- merge: 1\$
- insert: 2\$
- extract-min: $2\lfloor \log n \rfloor + 1$ \$

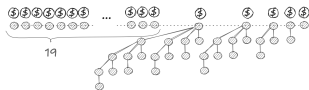
INVARIANT: Každý koreň stromu má 1\$.

- merge: 1\$
- insert: 2\$
- extract-min: $2\lfloor \log n \rfloor + 1$ \$

pred:



pripojené deti
min koreňa,
pred upratovaním:



po:



počet stromov:

20

reálna práca:
odstránenie minima
+ pripojenie jeho detí
1\$

$-1 + 5 = 24$

upratovanie
+ nájdenie minima:
24\$

$-21 = 3$

spolu:

25\$

vyúčtovanie:

1\$ zaplatí
samotný koreň

5\$ z peňazí
na operáciu
vložíme deťom
na účet

21\$ zaplatia
bývalé korene
zvyšné 3\$ zaplatíme
z peňazí vyzelených
na operáciu

8\$ z peňazí na operáciu
17\$ z našetrených peňazí

analýza extract-min:

- zmažeme min a pripojíme deti (1\$)
- každé dieťa sa stane nový koreň \Rightarrow dostane 1\$ (spolu $\leq \lfloor \log n \rfloor$ \$)
- upratanie t stromov trvá $O(t)$; rozdelíme stromy na dve skupiny:
 - $\ell = \#$ stromov, ktoré sa pripoja pod iné
 - $r = \#$ koreňov, ktoré ostanú koreňmi aj po upratovaní
- korene, ktoré pripojíme si to sami zaplatia
- $r \leq \lceil \log n \rceil \leq \lfloor \log n \rfloor + 1$ – toto zaplatíme z peňazí za operáciu

analýza extract-min:

- zmažeme min a pripojíme deti (1\$)
- každé dieťa sa stane nový koreň \Rightarrow dostane 1\$ (spolu $\leq \lfloor \log n \rfloor$ \$)
- upratanie t stromov trvá $O(t)$; rozdelíme stromy na dve skupiny:
 - $\ell = \#$ stromov, ktoré sa pripoja pod iné
 - $r = \#$ koreňov, ktoré ostanú koreňmi aj po upratovaní
- korene, ktoré pripojíme si to sami zaplatia
- $r \leq \lceil \log n \rceil \leq \lfloor \log n \rfloor + 1$ – toto zaplatíme z peňazí za operáciu

analýza extract-min:

- zmažeme min a pripojíme deti (1\$)
- každé dieťa sa stane nový koreň \Rightarrow dostane 1\$ (spolu $\leq \lfloor \log n \rfloor$ \$)
- upratanie t stromov trvá $O(t)$; rozdelíme stromy na dve skupiny:
 - $\ell = \#$ stromov, ktoré sa pripoja pod iné
 - $r = \#$ koreňov, ktoré ostanú koreňmi aj po upratovaní
- korene, ktoré pripojíme si to sami zaplatia
- $r \leq \lceil \log n \rceil \leq \lfloor \log n \rfloor + 1$ – toto zaplatíme z peňazí za operáciu

analýza extract-min:

- zmažeme min a pripojíme deti (1\$)
- každé dieťa sa stane nový koreň \Rightarrow dostane 1\$ (spolu $\leq \lfloor \log n \rfloor$ \$)
- upratanie t stromov trvá $O(t)$; rozdelíme stromy na dve skupiny:
 - $\ell = \#$ stromov, ktoré sa pripoja pod iné
 - $r = \#$ koreňov, ktoré ostanú koreňmi aj po upratovaní
- korene, ktoré pripojíme si to sami zaplatia
- $r \leq \lceil \log n \rceil \leq \lfloor \log n \rfloor + 1$ – toto zaplatíme z peňazí za operáciu

analýza extract-min:

- zmažeme min a pripojíme deti (1\$)
- každé dieťa sa stane nový koreň \Rightarrow dostane 1\$ (spolu $\leq \lfloor \log n \rfloor$ \$)
- upratanie t stromov trvá $O(t)$; rozdelíme stromy na dve skupiny:
 - $\ell = \#$ stromov, ktoré sa pripoja pod iné
 - $r = \#$ koreňov, ktoré ostanú koreňmi aj po upratovaní
- korene, ktoré pripojíme si to sami zaplatia
- $r \leq \lceil \log n \rceil \leq \lfloor \log n \rfloor + 1$ – toto zaplatíme z peňazí za operáciu

analýza extract-min:

- zmažeme min a pripojíme deti (1\$)
- každé dieťa sa stane nový koreň \Rightarrow dostane 1\$ (spolu $\leq \lfloor \log n \rfloor$ \$)
- upratanie t stromov trvá $O(t)$; rozdelíme stromy na dve skupiny:
 - $\ell = \#$ stromov, ktoré sa pripoja pod iné
 - $r = \#$ koreňov, ktoré ostanú koreňmi aj po upratovaní
- korene, ktoré pripojíme si to sami zaplatia
- $r \leq \lceil \log n \rceil \leq \lfloor \log n \rfloor + 1$ – toto zaplatíme z peňazí za operáciu

analýza extract-min:

- zmažeme min a pripojíme deti (1\$)
- každé dieťa sa stane nový koreň \Rightarrow dostane 1\$ (spolu $\leq \lfloor \log n \rfloor$ \$)
- upratanie t stromov trvá $O(t)$; rozdelíme stromy na dve skupiny:
 - $\ell = \#$ stromov, ktoré sa pripoja pod iné
 - $r = \#$ koreňov, ktoré ostanú koreňmi aj po upratovaní
- korene, ktoré pripojíme si to sami zaplatia
- $r \leq \lceil \log n \rceil \leq \lfloor \log n \rfloor + 1$ – toto zaplatíme z peňazí za operáciu

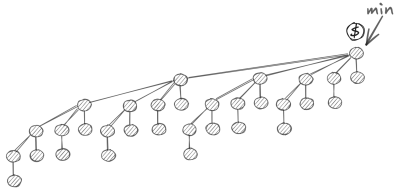
analýza extract-min:

- zmažeme min a pripojíme deti (1\$)
- každé dieťa sa stane nový koreň \Rightarrow dostane 1\$ (spolu $\leq \lfloor \log n \rfloor$ \$)
- upratanie t stromov trvá $O(t)$; rozdelíme stromy na dve skupiny:
 - $\ell = \#$ stromov, ktoré sa pripoja pod iné
 - $r = \#$ koreňov, ktoré ostanú koreňmi aj po upratovaní
- korene, ktoré pripojíme si to sami zaplatia
- $r \leq \lceil \log n \rceil \leq \lfloor \log n \rfloor + 1$ – toto zaplatíme z peňazí za operáciu

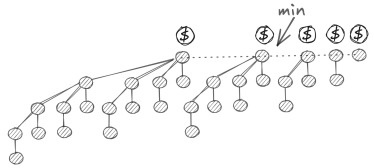
peniaze za operáciu extract-min: $2 \times \log n + 1$

$\$ \$ \$ \$ \$ \$$
 $\$ \$ \$ \$ \$ \$$

pred:



po:



$$\Phi(H) = \# \text{bin. stromov} = \# \text{koreňov}$$

operácia `extract-min` pre haldu s t koreňmi trvá $O(t + \log n)$
 $= O(\ell + \log n)$ zmena potenciálu $\Delta\Phi \leq \log n - \ell$

$$T_{amort} = T_{skut} + c \cdot \Delta\Phi = O(\ell + \log n) + c \cdot (\log n - \ell) = O(\log n)$$

$$\Phi(H) = \# \text{bin. stromov} = \# \text{koreňov}$$

operácia `extract-min` pre haldu s t koreňmi trvá $O(t + \log n)$
 $= O(\ell + \log n)$ zmena potenciálu $\Delta\Phi \leq \log n - \ell$

$$T_{amort} = T_{skut} + c \cdot \Delta\Phi = O(\ell + \log n) + c \cdot (\log n - \ell) = O(\log n)$$

$$\Phi(H) = \# \text{bin. stromov} = \# \text{koreňov}$$

operácia `extract-min` pre haldu s t koreňmi trvá $O(t + \log n)$
 $= O(\ell + \log n)$ zmena potenciálu $\Delta\Phi \leq \log n - \ell$

$$T_{amort} = T_{skut} + c \cdot \Delta\Phi = O(\ell + \log n) + c \cdot (\log n - \ell) = O(\log n)$$

$$\Phi(H) = \# \text{bin. stromov} = \# \text{koreňov}$$

operácia `extract-min` pre haldu s t koreňmi trvá $O(t + \log n)$
 $= O(\ell + \log n)$ zmena potenciálu $\Delta\Phi \leq \log n - \ell$

$$T_{amort} = T_{skut} + c \cdot \Delta\Phi = O(\ell + \log n) + c \cdot (\log n - \ell) = O(\log n)$$

$$\Phi(H) = \#\text{bin. stromov} = \#\text{koreňov}$$

operácia `extract-min` pre haldu s t koreňmi trvá $O(t + \log n)$
 $= O(\ell + \log n)$ zmena potenciálu $\Delta\Phi \leq \log n - \ell$

$$T_{amort} = T_{skut} + c \cdot \Delta\Phi = O(\ell + \log n) + c \cdot (\log n - \ell) = O(\log n)$$